

2017 年全国大学生数学建模竞赛

国家二等奖

参赛作品：优化巡检线路的排班模型（2017D）



优化巡检线路的排班模型

摘要

巡检线路排班问题既要考虑人力资源的耗费，又要兼顾工作量的均衡。本文针对固定上班时间、错开上班时间、有无休息时间等情况，建立了一种可行的巡检线路排班优化模型。

分析固定上班时间的情形，知道一天三班所需的最少巡检人数是相同的。首先利用 Floyd 算法求出任意两个巡检点之间的最短行走时间路径，建立从调度中心出发的最短行走时间路径回路的优化模型，并运用 LINGO 软件求解得最短行走时间为 146 分钟。然后建立最少人数模型，求解得到每班至少需要 5 名巡检工人，所以一天需要 15 人巡检。结合最短行走时间路径，建立多目标优化模型，充分考虑工作量的均衡度，将 26 个巡检点进行合理的划分，然后分别找到最短的行走回路，最后通过计算均衡度得 $p = 9.8\%$ ，说明这 5 个人的工作量是非常均衡的。罗列 5 人 480 分钟的巡检路线与排班时间表。

对于有休息时间的的问题，在合理的假设下，以用餐次数分两种情况计算每班至少需要的人数。以相邻两区域两两配对错开用餐时间的思想，建立有用餐时间的最少人数模型，计算得有用餐的两个班次各需要 8 人，计算均衡度得 $p = 44\%$ ，说明工作量很不均衡，通过两两相互交换巡检任务后，均衡度下降到 30.4%。通过分析，若以 C_n^2 的倍数上班时间进行两两互换巡检任务，会大大提高工作量的均衡度。对不需要进餐的班至少需要 5 人，由问题 1 的结果分析，知 5 个巡检人员在相邻两次巡检中，至少有一个巡检回路的等待为 10 分钟以上，所以 2 小时左右休息 5~10 分钟这个条件易成立。所以若一天有两个班有进餐休息，则需要的巡检人数为 21 人；若一天有一个班进餐两次，则需要的巡检人数为 18 人，并给出一天所有人员的巡检时间表。

对错时上班的方式，在无休息巡检的条件下，建立以错时 g 的模型，经分析以 $g=35$ 分钟在间隔错开巡检。通过 Excel 统计分析得三班人数依次为 5, 4, 4 个巡检工人，共 13 人。根据上班巡检时间表，计算得到均衡度为 15.8%，均衡度虽然比原问题高一些，但是总人数少了 2 人。所以错时上班能节省人力资源。

对错时上班的方式，在有用餐休息的条件下，因为问题 2 中的最少人数模型是采用两两配对的组合方案，经分析错时上班更没有比原问题更好的方案，所以有用餐休息的情况采用错时上班并不能减少人力，且晚班也没有减少人力，都是需要 5 个人。若其中一个班是同时有两个用餐的，利用错时上班方式一天所需人数分别为 8, 5, 4 人，共 17 人，比问题 2 的减少 1 人。

在建立模型时，通过考虑题目中所有已知条件，利用多种常见的数学方法和算法，使用编程得到两点之间的最短路径及最短行走时间回路，并制作对应的路线图和时间表，以便于直接观察所需要的信息。

关键字：Floyd 算法，排班时间表，最短巡检行走时间，均衡度，优化模型

一、问题介绍

某化工厂需对 n 个点进行巡检，给出各个点的巡检周期 $r_i (i=1,2,\dots, n)$ 、巡检耗时 $t_i (i=1,2,\dots, n)$ 、两点之间的连通关系及行走所需时间。每个点每次巡检需要一名工人，巡检工人的巡检起始地点在巡检调度中心 (XJ0022)，在调度中心得到巡检任务后开始巡检。建立模型来安排巡检人数和巡检路线，使得所有点都能按要求完成巡检，并且耗费的人力资源尽可能少，同时还应考虑每名工人在一时间段内 (如一周或一月等) 的工作量尽量平衡。

问题 1. 如果采用固定上班时间，不考虑巡检人员的休息时间，采用每天三班倒，每班工作 8 小时左右，每班需要多少人，巡检线路如何安排，并给出巡检人员的巡检线路和巡检的时间表。

问题 2. 如果巡检人员每巡检 2 小时左右需要休息一次，休息时间大约是 5 到 10 分钟，在中午 12 时和下午 6 时左右需要进餐一次，每次进餐时间为 30 分钟，仍采用每天三班倒，每班需要多少人，巡检线路如何安排，并给出巡检人员的巡检线路和巡检的时间表。

问题 3. 如果采用错时上班，重新讨论问题 1 和问题 2，试分析错时上班是否更节省人力。

二、模型假设、符号说明

2.1 模型假设

(1) 全文假设所有巡检工人在巡检调度中心点 ($i=22$) 处领取当天的巡检任务，然后前往巡查点直至上班结束，中途不需要回到调度中心。

(2) 全文假设以巡检工人在同一点 i 前后两次巡检时间差与周期 (最小) 比较，若时间差比周期小，则在负责的区域起点等待，刚好等于巡检点的最少周期时再进行下一次巡检。若未到某点的巡检周期时，其剩余时间又未超过巡检区域的最小周期，则不等待，直接提前巡检。

(3) 问题二中，假设若休息时间与进餐时间同时发生，则不叠加计时，只考虑进餐的用时 (30 分钟)；进餐前要完成当前巡检的回路，进餐回来后回到离开时对应的巡检点。

(4) 问题三中，每个人都能按错时上班的时间准时到达巡检调度中心点。享受进餐后至少回到巡检区域进行巡检 35 分钟才能下班，即等待另一人来到接手巡检工作。

(5) 全文所有时间都是以分钟为单位计算的。

2.2 符号说明

符号	符号说明
n	表示工厂巡检点的点数。
t_i	表示第 i 个巡检点的耗时， $i=1,2,\dots,n$ ；
T	表示所有巡检点耗时总和；
w_{ij}	表示第 i 点与第 j 点行走所需时间， $i=1,2,\dots,n$ ， $j=1,2,\dots,n$ ；
u_i	表示额外的约束变量，在计算最短行走时间时避免子巡回；
x_{ij}	0-1 变量，表示是否从第 i 点行走到第 j 点， $i=1,2,\dots,n$ ， $j=1,2,\dots,n$ ；

r_i 表示第 i 点的巡检周期 $i=1,2,\dots,n$;

h 表示进餐时间

三、固定上班时无休息的巡查排班模型

3.1 固定上班时无休息排班问题分析

问题要求：不考虑巡检人员的休息时间，每天按三班倒上班，由此可知，每班的人数都是相同的。设计耗费人力资源尽可能少且每人的工作量尽量均衡的巡检线路和巡检时间表。

这里先求解每班巡检人数最少的问题。待确定人数后，再设计巡检路线，此问题可看作多个旅行商的最佳路线问题。因一个旅行商的最佳路线问题都不存在多项式时间内的精确算法^[1]。

3.2 各班人数最少模型

为求每班人数最少，根据 26 个点的连通路线图，利用 Floyd 算法求出任意两点之间的最短行走时间矩阵 wt_{ij} 。然后建立模型求解从调度中心出发，历遍所有工作点的最短行走时间的回路模型。

模型 I：最短行走时间回路模型

决策变量： $x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{不走 } i \text{ 到 } j \text{ 路线} \\ 1 & \text{行走 } i \text{ 到 } j \text{ 路线, 且 } i \text{ 在 } j \text{ 前} \end{cases}$

目标函数：从调度中心回到调度中心行走时间 Z 最短： $\min z = \sum_{i,j=1}^n wt_{ij}x_{ij}$

约束条件：

(1) 每个点后只有一个点，则 $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, j \neq i, i=1 \dots n$

(2) 每个点前只有一个点，则 $\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, i \neq j, i=1 \dots n$

为避免出现子巡回路线的问题，将额外变量 $u_i (i=1 \dots n)$ 附加到问题中，即

(3) 附加约束条件： $u_i - u_j + nx_{ij} \leq n-1, 2 \leq i \neq j \leq n$

于是，得到最短行走时间回路模型

$$\min Z = \sum_{i,j=1}^n wt_{ij}x_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, j \neq i, i=1 \dots n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, i \neq j, i=1 \dots n$$

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n-1, 2 \leq i \neq j \leq n$$

$$x_{ij} = 0 \text{ or } 1, i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$u_i \in R, i = 2, 3, \dots, n$$

因为每个点每次巡检都需要一名工人，由附件知每个点的巡检耗时，因此可以求出

所有点的总巡检时间。结合模型 I 建立固定时间无休息的人数最少模型，即

模型 II：每班人数最少模型

决策变量： N 表示每班的人数。

目标函数： 求 N 的最小值。

$$T = \sum_{i=1}^n t_i$$

$$N = \left\lceil \frac{T+Z}{\min(r_i)} \right\rceil$$

其中， $\min(r_i)$ 表示所有的巡检点的最小巡检周期， Z 为最短回路的行走时间， T 表示所有巡检点的巡检时间。

3.3 模型 I 和 II 的求解

这里用 Floyd 算法^[3]求出任意两点之间的最短行走时间矩阵 wt_{ij} ，设
 $A(i, j)$ ：第 i 点到第 j 点的行走时间。
 $C(i, j)$ ：第 i 点到第 j 点之间的插入点。

Floyd 算法步骤：

- ① 输入： n 阶初始行走时间矩阵 wt ，数值充分大；
- ② 赋初值：对所有的 $i, j, wt(i, j) \leftarrow A(i, j), C(i, j) \leftarrow j, k \leftarrow 1$ ；
迭代更新：若存在 k ，满足 $wt(i, k) + wt(k, j) < wt(i, j)$ ，则更新
 $wt(i, j) = wt(i, k) + wt(k, j), C(i, j) \leftarrow k$ ；
- ③ 直到任意两点间的行走时间不再更新，停止计算。

利用 Matlab 软件编程实现 Floyd 算法（程序参看附录的附件 1），运行得到任意两点间最短行走时间，这是一个主对角线全是 0 的对称的矩阵 wt_{ij} ，具体数据参看附录的附件 2。

将矩阵 wt_{ij} 作为已知数据，通过 LINGO 编程求解模型 I（程序参看附录的附件 3），得到从调度中心（第 22 点）遍历所有的点，再回到调度中心的最短行走时间为 68 分钟。决策变量 x_{ij} 等于 1 的值有：

则最短行走时间路线用为：

$$22 \xrightarrow[\frac{t=3}{2}]{\frac{wt=2}{3}} 21 \xrightarrow{\frac{1}{2}} 4 \xrightarrow{\frac{3}{2}} 2 \xrightarrow{\frac{2}{3}} 1 \xrightarrow{\frac{3}{3}} 3 \xrightarrow{\frac{3}{2}} 7 \xrightarrow{\frac{2}{2}} 5 \xrightarrow{\frac{3}{3}} 14 \xrightarrow{\frac{1}{3}} 6 \xrightarrow{\frac{5}{2}} 10 \xrightarrow{\frac{2}{3}} 11$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{5}} 13 \xrightarrow{\frac{2}{3}} 16 \xrightarrow{\frac{3}{2}} 18 \xrightarrow{\frac{2}{2}} 15 \xrightarrow{\frac{2}{2}} 12 \xrightarrow{\frac{8}{2}} 26 \xrightarrow{\frac{4}{2}} 17 \xrightarrow{\frac{1}{3}} 8 \xrightarrow{\frac{2}{2}} 25 \xrightarrow{\frac{3}{4}} 9 \xrightarrow{\frac{2}{2}} 24$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}} 23 \xrightarrow{\frac{6}{2}} 19 \xrightarrow{\frac{2}{3}} 20 \xrightarrow{\frac{2}{2}} 22$$

最短行走时间对应的行走路线如图 1 所示

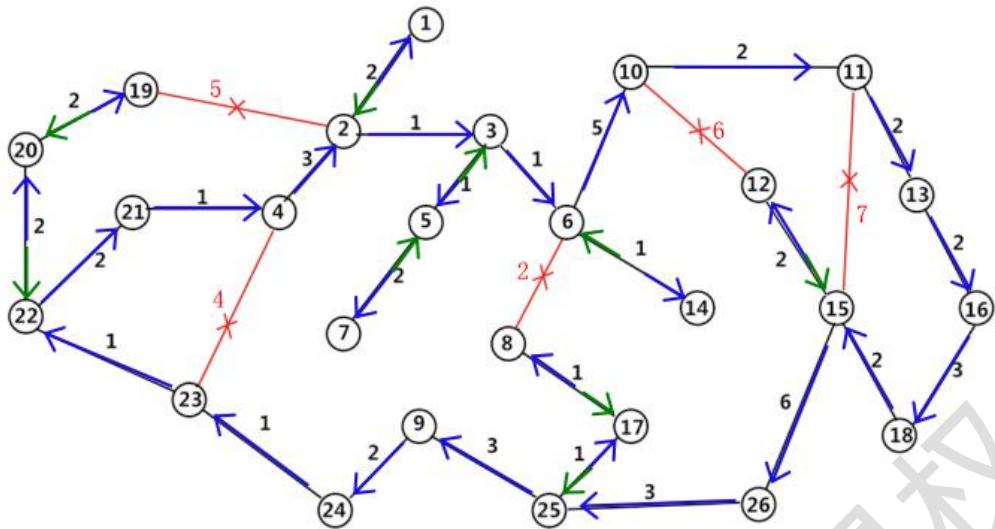


图 1 最短行走时间的行走指示路线图

由图 1 看出，有 5 条路线是没有行走的，分别为 $w_t(19,2)=5$ ， $w_t(23,4)=4$ ， $w_t(6,8)=2$ ， $w_t(10,12)=6$ ， $w_t(11,15)=7$ ，其中有 4 条路线是因为两点行走时间很长的。

因为各个点都要有一个人来完成巡查，所以总的巡查时间

$$T = \sum_{i=1}^n t_i = 78(\text{分钟})$$

易知，所有点的巡查周期的最小值为 35，即 $\min(r_i)=35$ 。所以模型 II 的决策变量 N 为

$$N = \left\lceil \frac{T+Z}{\min(r_i)} \right\rceil = \left\lceil \frac{78+68}{35} \right\rceil \approx \lceil 4.2 \rceil = 5(\text{人})$$

所以每班最少的人数是 5 人，即一天至少要 15 个工人进行巡查。

3.4 巡检线路安排模型的建立与求解

由模型 II 知道至少要安排 5 人才能按要求完成巡检任务。因此可将 26 个巡检点分为 5 部分，由 5 人分别完成，设计每人行走时间尽可能短且工作量尽可能均衡的巡检路线，此问题是多个旅行商的最佳行走路线问题。

把 26 个点看作加权图 G 中的顶点集 V ，将 V 划分 5 个子顶点集 V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 ，即将加权图 G 分成 5 个子图 $G[V_1], G[V_2], G[V_3], G[V_4], G[V_5]$ ，使得

$$(1) \bigcup_{k=1}^5 V_k = V(G);$$

$$(2) \min(p), \quad p = \frac{\max_{k,l} |d(D_k) - d(D_l)|}{\max_k d(D_k)}, \quad p \text{ 表示工作均衡程度, 显然 } 0 \leq p \leq 1, \text{ 值}$$

越小均衡性越好。其中 D_k 是 V_k 的导出子图 $G[V_k]$ ， $d(D_i)$ 表示行走时间和巡检耗时的回路总时间， $k, l = 1, 2, \dots, 5$;

$$(3) \sum_{k=1}^5 d(D_k) = \min, \quad \text{总的行走时间和巡检耗时最短。}$$

$$(4) d(D_k) \leq \min(r_k), \quad \min(r_k) \text{ 表示顶点集 } V_k \text{ 中所有的巡检点的最小周期。}$$

条件 (1) 是将 26 个点划分成 5 个部分，各部分独立构成一个回路。划分标准是要满足条件 (2)，条件 (3) 条件 (4)。

考虑到工作尽量均衡。因些在本问寻求一种较合理的划分准则。我们在模型 I 得到的最短行走线路的基础上，对 26 个工作点划分为 5 个部分，在划分时要考虑一些巡检周期较大的点，要分散在 5 个划分区域中。

由前面分析可知，26 个点的划分方案是不唯一的。所以我们根据模型 I，用穷举法找出了一种较合理的行走路线划分方案，其中各部分包括的顶点为：

$$V_1 = \{22, 20, 19, 21, 23, 24\}, V_2 = \{4, 2, 1, 3, 5, 7\}, V_3 = \{6, 14, 10, 11\},$$

$$V_4 = \{15, 12, 18, 16, 13\}, V_5 = \{8, 9, 17, 25, 26\},$$

划分如图 2 所示：

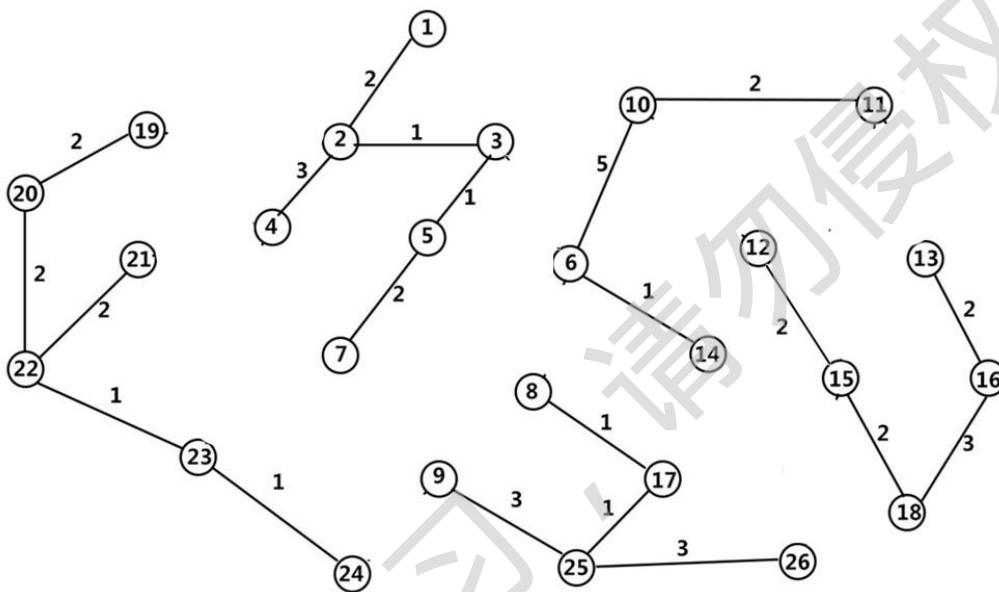


图 2 5 个工人的巡检点区域划分图

根据前面分析，易得各个分区的最短行走时间路线指示。所走的具体路线及工作时间如表 1 所示。

表 1 5 个工人的巡检路线指示与第一个周期的工作时间

工人序号	巡检路线指示	一个周期工作时间
N ₁	$22 \xrightarrow[\substack{wt=2 \\ t=2}]{2} 20 \xrightarrow[\substack{wt=2 \\ t=3}]{2} 19 \xrightarrow[\substack{wt=2 \\ t=2}]{6} 21 \xrightarrow[\substack{wt=2 \\ t=3}]{3} 23 \xrightarrow[\substack{wt=2 \\ t=3}]{1} 24 \xrightarrow[\substack{wt=2 \\ t=2}]{2} 22$	31 分钟
N ₂	$4 \xrightarrow[\substack{wt=3 \\ t=2}]{3} 2 \xrightarrow[\substack{wt=2 \\ t=2}]{2} 1 \xrightarrow[\substack{wt=3 \\ t=3}]{3} 3 \xrightarrow[\substack{wt=2 \\ t=3}]{2} 5 \xrightarrow[\substack{wt=2 \\ t=2}]{7} 7 \xrightarrow[\substack{wt=2 \\ t=2}]{4} 4$	33 分钟
N ₃	$9 \xrightarrow[\substack{wt=3 \\ t=4}]{3} 25 \xrightarrow[\substack{wt=3 \\ t=2}]{3} 26 \xrightarrow[\substack{wt=1 \\ t=2}]{4} 17 \xrightarrow[\substack{wt=5 \\ t=3}]{1} 8 \xrightarrow[\substack{wt=3 \\ t=4}]{9} 9$	29 分钟
N ₄	$6 \xrightarrow[\substack{wt=1 \\ t=3}]{1} 14 \xrightarrow[\substack{wt=6 \\ t=3}]{6} 10 \xrightarrow[\substack{wt=2 \\ t=2}]{2} 11 \xrightarrow[\substack{wt=7 \\ t=3}]{7} 6$	27 分钟
N ₅	$15 \xrightarrow[\substack{wt=2 \\ t=2}]{4} 12 \xrightarrow[\substack{wt=4 \\ t=2}]{4} 18 \xrightarrow[\substack{wt=3 \\ t=2}]{3} 16 \xrightarrow[\substack{wt=2 \\ t=3}]{2} 13 \xrightarrow[\substack{wt=7 \\ t=5}]{7} 15$	32 分钟

从表 1 看出，5 个人的第一个周期的工作时间是比较均衡的，但是由于有些巡检点的巡检周期是很长的。所以在计算工作量的时候，要以 8 个小时（480 分钟）的总工作时间来衡量是否平衡。

考虑到各个巡检点的周期不全相等，以这个标准来判断是否巡检该点，若未到某点

的巡检周期时，其剩余时间又未超过巡检区域的最小周期，则不等待，直接提前巡检。计算公式为：

$$m = \left\lfloor \frac{r_k}{\min(r_i)} \right\rfloor$$

其中， r_k 表示第 k 个巡检点的周期， m 表示 m 个轮回巡检一次。

根据这个公式计算得到几个特殊的巡检点的 m 值如表 2 所示。

表 2 特殊的巡检点的 m 值

周期（分钟）	50	80	120	480	720
m 值（次数）	1	2	3	13	20

表 2 说明若巡检周期是 80 时， m 值是 2，则表示隔一轮再巡检该点。

因此，按上面的划分区域计算 5 个工厂在 480 分钟左右的总工作量，对于稍远一点的工作区域，要考虑下个岗位工人的接替行走的时间，所有有些工从的上班时长会超过 8 小时。表 3 列举了前 3 次工作时间，和总的工作时间。

表 3 5 个工人 480 分钟左右的总工作时间

工人序号	一个工作周期的工作时间（分钟）				总工作时间分钟	上班时长
	第一次	第二次	第三次	第四次		
N ₁	31	24	31	24	385	479
N ₂	33	24	33	24	399	479
N ₃	29	25	25	27	362	480
N ₄	27	25	25	27	360	480
N ₅	32	23	32	23	395	500

从表 3 看出，N₁、N₂、N₃ 和 N₄ 这 4 个工作人员的上班时长都很准时，因为后面还有等待时间且足够下一个班的人员到达后再进行巡检。但是 N₅ 上班时长是 500 分钟，这是由于他巡检完 13 轮后，剩下 12 分钟等待开始下一轮，而从调度中心到达该区域的起始点要 15 分钟，所以，N₅ 需要继续下一轮巡检，且要巡检到第 18 点另一个人才赶到第 18 点的位置，所以他的工作时间会更长一些。

各个巡检人员均衡度为：

$$P = \frac{\max_{k,l} |d(D_k) - d(D_l)|}{\max_k d(D_k)} = \frac{399 - 360}{399} \times 100\% = 9.8\%$$

说明这种巡检路线的均衡性很好。每天的均衡性都较好，所以一周或一个月的工作量均衡性也是很好的。

巡检时间表如图 3 所示

1	N1路线1			N2路线2			N3路线3			N4路线4			N5路线5		
2	巡检时刻	巡检点	休息时间	巡检时刻	巡检点	休息时间	巡检时刻	巡检点	休息时间	巡检时刻	巡检点	休息时间	巡检时刻	巡检点	休息时间
3	0	22		3	4		4	9		8	6		15	15	
4	4	20		8	2		11	25		12	14		19	12	
5	9	19		14	1		16	26		21	10		25	18	
6	16	23		20	3		22	17		25	11		30	16	
7	20	24		24	5		25	8		35	6		35	13	
8	26	21		28	7		33	9				8	47	15	
9	31	22		36	4				6						3
10			4			2									
11	35	22		38	4		39	9		43	6		50	15	
12	39	20		43	2		49	26		48	14		54	12	
13	44	19		49	1		56	8		58	11		60	18	
14	51	23		55	3		64	9		68	6		65	16	
15	55	24		62	4				10			10	73	15	
16	59	22				11									12
17			11												

图3 5个工人的巡检时刻安排表

具体的上班时间及各个巡检点的巡检时间见附录4。

四、固定上班时间内有休息的巡检模型

4.1 固定上班时间内有休息巡检问题分析

本问在问题1的基础上，增加了两个条件：既要考虑巡检人员的休息时间，每两个小时休息一次，休息时间为5-10分钟；也要考虑中午12时和下午6时左右进餐，其他条件不变。

假设如果休息时间与进餐时间同时发生，则不叠加计时，以进餐时间为准，因此每班上班人数是不相同。设三个班次称为早、中、晚。分两种进餐情况：

- 一、若有两个班分别有进餐休息，则这两个班人数相同，另一个班人数另外计算；
- 二、若有一个班同时进餐休息两次，则另外两个不进餐的班所需人数相同。

在计算巡检人数时要分两种情况讨论。

情形1 有两个班进餐有人数的确定

4.2 有两个班进餐的模型

显然若能满足用餐休息的30分钟，就一定能满足每2小时左右休息5~10分钟。因为本问是固定上班时间的，所以本问的30分钟进餐时间是整个班8个小时一起讨论的。在满足前面假设的条件下，我们在建立人数最少模型作以下分析：

- (1) 显然若是每个人都同时去进餐，需要上班的人数会特别多，这显然不可行。
- (2) 考虑与相邻的工作人员相互配合完成任务，即错开用餐时间。如A和B两人，A巡检完一个周期的任务后就去看餐，然后B帮A巡检下一周期的，则B在35分钟内回到自己初始的巡检点，继续工作巡检，然后等A回来后，B去看餐。

因此类似问题一建立满足上述第二种情况的人数模型。

模型III：有进餐休息的巡检人数模型

决策变量： N 表示早、中两个班次的人数。

目标函数： 求 N 的最小值。

$$T = \sum_{i=1}^n t_i$$

$$N = \left\lceil \frac{T+Z}{\frac{2\min(r_i)-h}{2}} \right\rceil$$

式中， h 表示用餐休息时间。

由问题一知 $T = 78$, $Z = 68$, $\min(r_i) = 35$, 代入上 N 得

$$N = \left\lceil \frac{T+Z}{\frac{2\min(r_i)-h}{2}} \right\rceil = \left\lceil \frac{78+68}{\frac{2 \times 35 - 30}{2}} \right\rceil \approx \lceil 7.3 \rceil = 8$$

所以早、中两班每班最少的人数是 8 人，而不是问题一人数的 2 倍的，这是因为有部分巡检点的巡检周期很长。

模型 IV：有进餐休息的巡检路线及时间表

根据前面的分析，采用错开吃饭时间，所以将问题 1 的最短时间行走路线划分为 4 个大区域，同样要满足巡检条件，然后再将 4 个大区域划分为 8 个小区域，且每个区域完成一次巡检任务时间不能超过 20 分钟，因为在两个周期内要有 30 分钟进餐时间。即，每次巡检至少要有 15 分钟休息时间。

因此，把 26 个点看作加权图 G 中的顶点集 V ，将 V 划分 8 个子顶点集 V_1, V_2, \dots, V_8 ，即将加权图 G 分成 8 个子图 $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_8]$ ，使得

$$(1) \bigcup_{k=1}^8 V_k = V(G);$$

$$(2) \min(p), p = \frac{\max_{k,l} |d(D_k) - d(D_l)|}{\max_k d(D_k)}, p \text{ 表示工作均衡程度, 显然 } 0 \leq p \leq 1, \text{ 值}$$

越小均衡性越好。其中 D_k 是 V_k 的导出子图 $G[V_k]$ ， $d(D_i)$ 表示行走时间和巡检耗时的回路总时间， $k, l = 1, 2, \dots, 8$ ；

$$(3) \sum_{k=1}^8 d(D_k) = \min, \text{ 总的行走时间和巡检耗时最短。}$$

$$(4) d(D_k) \leq 20, \text{ 表示顶点集 } V_k \text{ 中所有的巡检点的最小周期。}$$

$$(5) d(D_k) + d(D_l) \leq 35, k, l = 1, 2, \dots, 8, \text{ 即确保能组成两两配合, 错开进餐时间。}$$

并且这两人的巡检时间要刚好错开。

由前面分析知，满足条件 (4) 肯定能满足每 2 小时左右休息 5~10 分钟这个条件。显然，26 个点的划分 8 个区域的方案也是不唯一的。我们按类似问题一的方法，根据模型 I，用穷举法找出了一种较合理的行走路线划分方案。8 个工作区域划分如图 4 所示：

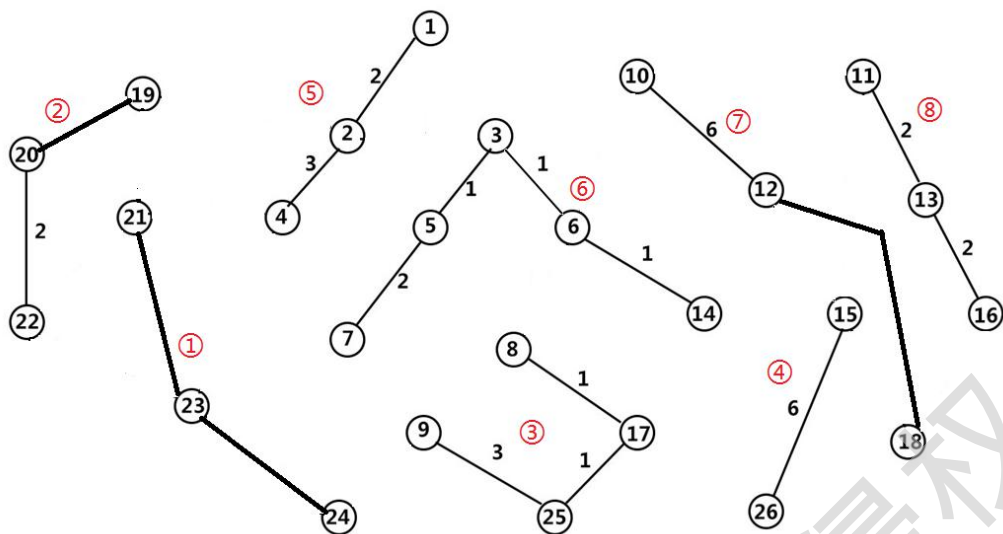


图 4 8 个工人的巡检点区域划分图

若在进餐前后，①与②、③与④、⑤与⑥和⑦与⑧相互错开进餐，两两配对中的其中一人先去吃饭，前后吃饭时间相差 35 分钟左右。值得注意的是，前面假设每次巡检完成后都会回到回路的初点等待下一次巡检，本问题在就餐前后不能按该方法进行，若刚好与配对的工人同时进行巡检任务。这时就需要利用等待时间来提前下一轮巡检直到与对方错开巡检时间。即 A 巡检时，B 在等待休息，B 巡检时，A 在等待休息。

根据问题 1，易得各个分区的最短行走时间路线指示。8 所走的具体路线及工作时间如表 4 所示。

表 4 8 个工人的巡检路线指示与第一个周期的工作时间

工人序号	巡检路线指示	一个周期工作时间
N ₁	$23 \xrightarrow[t=3]{wt=1} 24 \xrightarrow{\frac{4}{2}} 21 \xrightarrow{\frac{3}{3}} 23$	17 分钟
N ₂	$20 \xrightarrow[t=3]{wt=2} 19 \xrightarrow{\frac{4}{2}} 22 \xrightarrow{\frac{2}{2}} 20$	15 分钟
N ₃	$25 \xrightarrow[t=2]{wt=3} 9 \xrightarrow{\frac{8}{4}} 8 \xrightarrow{\frac{1}{3}} 17 \xrightarrow{\frac{1}{2}} 25$	24 分钟
N ₄	$26 \xrightarrow[t=2]{wt=6} 25 \xrightarrow{\frac{6}{2}} 26$	16 分钟
N ₅	$1 \xrightarrow[t=3]{wt=5} 4 \xrightarrow{\frac{3}{2}} 2 \xrightarrow{\frac{2}{2}} 1$	17 分钟
N ₆	$3 \xrightarrow[t=3]{wt=1} 6 \xrightarrow{\frac{1}{3}} 14 \xrightarrow{\frac{3}{3}} 5 \xrightarrow{\frac{2}{2}} 7 \xrightarrow{\frac{3}{2}} 3$	23 分钟
N ₇	$10 \xrightarrow[t=2]{wt=6} 12 \xrightarrow{\frac{4}{2}} 18 \xrightarrow{\frac{9}{2}} 10$	25 分钟
N ₈	$16 \xrightarrow[t=3]{wt=4} 11 \xrightarrow{\frac{2}{3}} 13 \xrightarrow{\frac{2}{5}} 16$	19 分钟

时间表安排与问题一相似，按上面的划分区域计算 8 个工厂在 480 分钟左右的总工作量。表 4 列举了前 3 次工作时间，和总的工作时间。

表 4 8 个工人 480 分钟左右的总工作时间

工人序号	一个工作周期的工作时间（分钟）			总工作 时间	总上班 时间
	第一次	第二次	第三次		
N ₁	17	17	17	238	472
N ₂	15	15	15	210	487
N ₃	21	18	18	255	475
N ₄	14	14	14	196	490
N ₅	17	17	17	238	475
N ₆	24	13	21	247	491
N ₇	25	25	25	350	482
N ₈	21	21	21	294	497

从表 4 看出，8 个工作人员的 480 分钟内工作时间是不太均衡的。但是这仅仅是一个班次的。如果时间长了，大家相互交换巡检区域就能保证工作时间均衡了。具体的上班时间及各个巡检点的巡检时间见附录 5。

4.3 巡检人员工作量均衡性分析

计算各个巡检人员均衡度为：

$$p = \frac{\max_{k,l} |d(D_k) - d(D_l)|}{\max_k d(D_k)} = \frac{350 - 196}{350} \times 100\% = 44\%$$

说明这种巡检路线的均衡性不是很好。但是该模型是可以两两配对交换巡检工作的。若采用交换，则工作量取两者之和的一半，即各自的工作时间为：224, 224, 225.5, 225.5, 242.5, 322, 322。利用该组工作时间计算均衡度得

$$\tilde{p} = \frac{\max_{k,l} |d(D_k) - d(D_l)|}{\max_k d(D_k)} = \frac{322 - 224}{322} \times 100\% = 30.4\%$$

对换巡检工作后，均衡度降低了，但是均衡性还是比较差。因为这是由于进餐时间较长，且无进餐至少要 5 人工作，有进餐休息时间这个限制，需要两两配对才能完成任务。这里两两配对只是 4 对，不是 5 对，所以工作的均衡性会较差。

因此，在一周或者一个月的长时期工作中，可以通过两两交换巡检任务的形式来确保工作量的均衡性。从数据上看，N₁、N₂、N₃、N₄ 和 N₅、N₆ 这两对的工作量相关不大，均衡性很好。要提高整体的均衡性，只能的长时间（一周或一月）的工作之中交换巡检工作来实现了。若时间周期为：C_n²，其中 n 为每班巡检人员的数。

4.4 晚班有休息的人数模型和巡检路线

由问题一的模型可得巡检工人巡检时间最少的巡检线路可划分为 5 个巡检区域，但本模型增加了巡检 m 小时左右需要 s 分钟。显然带有休息时间的人数至少要 5 个工作人员，通过问题 1 的模型知道 5 个人的巡检规律，以 35 分钟为周期，相邻两次巡检等待时间分别为：

$$N_1: 4, 11, 4, 11, 4, 11...$$

N_2 : 2, 11, 2, 11, 2, 11...

N_3 : 6, 10, 10, 8, 10, 10, 8...

N_4 : 8, 10, 10, 8, 10, 10...

N_5 : 3, 12, 3, 12, 3, 12...

由此可以看出工人 N_3 和 N_4 每巡检完一周后等待的时间都超过 5 分钟，所以对这两个工人来说，自然就满足 2 小时休息 5~10 分钟这个条件。而另外三名工人都是间隔一次巡检就有 10 分钟的休息时间，所以还是能满足 2 小时左右休息一次的条件。

因此，晚班有休息的巡检人数为 5 人。所以一天有休息且有进餐时间的巡检人数分别为：早班（中餐）8 人，中班（晚餐）8 人，晚班需要 5 人，每天至少需要 21 人。

其均衡性参看前面的分析，因为早班、中班就是前一个模型的结论，晚班就是问题一的人数及巡检安排时间表。

情形 2 一个班同时进餐两次的情况分析

根据前面分析可知，若有 1 个班进餐两次，则进餐休息的班需要 8 人，而不需要进餐的两个班各需要 5 人，所以一共三班共需要 18 人。

五、错时上班的巡检模型

5.1 错时上班无休息的巡检模型分析

问题要求：不考虑巡检人员的休息时间，每天按三班倒上班，不是统一的上班時間，每班的人数不一定相等。则需要设计耗费人力资源尽可能少且每人的工作量尽量均衡的巡检线路和巡检时间表。根据问题一的模型可得，由调度中心再回到调度中心时间最短的巡检路径，每一个巡检工人都在前一个巡检工人后的最小巡检周期后开始巡检工作，即可满足错时上班的约束条件。

所以我们将问题一中求出从调度中心出发，历遍所有工作点的最短行走时间，因为大部分巡检点的最小周期为 35 分钟，所以巡检员工应错开 35 分钟开始巡检。由于我们在问题一中已证明所需要的最少人数为 5 个巡检员工，划分 5 个区域才能使工作量平衡。即在本题中巡检工人的最大数为 5 个员工，通过错时上班的限制条件，应能使三班的员工总和减少。

模型 IV：错时上班巡检模型的建立与求解

决策变量： ct 表示巡检工人错时上班的时长。

目标函数：要求错时上班的时长尽可能长，即 $\max(ct)$ ， $ct \geq 0$ 。

$$ct = \min(r_i)$$

由问题一模型得 $ct = \min(r_i) = 35$ 。

根据每次巡检工人错开巡检的时长为 35，即第一个上班 35 分钟后第二个人到达并开始巡检，依次类推。利用 Excel 软件统计得各个工人的巡检时间如表 5 所示，具体上班时长见附录 5。

表 5 工人错时上班的工作安排时长表

工人编号	出发时长 (min)	工作时长	起点等待时间	到达时长
N_1	0	146	无	146

N ₂	35	122	无	157
N ₃	70	138	无	208
N ₄	105	126	无	231
N ₅	140	138	无	278
N ₁	175	122	29	297
N ₂	210	142	53	352
N ₃	245	122	37	367
N ₄	280	138	49	418
N ₅	315	126	37	441

由图 5 可以看出第各个具体的巡检工作时间是不相等的，这是由于部分巡检点的巡检周期比较大引起的。因为巡检工人 N₁ 的到达时间大于调度中心新的周期，所以需要第五名巡检工人 N₅ 从调度中心出发以满足条件。在第二轮到达的时长小于出发时长，此时第五名巡检工人 N₅ 在调度中心等待 29 分钟。

因此，统计得到一天中错时上班的三个班次的人数依次为 5，4，4 人，总共需 13 人。与问题 1 固定时间上班这个情形相比，错时上班的人数比固定上班人数（15 人）少 2 人，所以错时上班更节省人力。

统计这 15 个人的工作时长如表 6 所示。

表 6 15 个人的工作时长统计表

班次	工人编号	上班时长	工作时长
早班	N ₁	488	406
	N ₂	472	386
	N ₃	492	402
	N ₄	472	386
	N ₅	488	402
中班	N ₆	523	416
	N ₇	511	358
	N ₈	525	418
	N ₉	507	356
晚班	N ₁₀	523	416
	N ₁₁	511	356
	N ₁₂	513	408
	N ₁₃	507	352

由表 6 可以看出，上班时长区别不大。由表中数据分析该模型的均衡性。

计算各个巡检人员均衡度为：

$$p = \frac{\max_{k,l} |d(D_k) - d(D_l)|}{\max_k d(D_k)} = \frac{418 - 352}{418} \times 100\% = 15.8\%$$

说明这种巡检路线的均衡性较好。但是没有模型 1 的均衡性好，这是由于每个人都巡检全部点，且有些点的巡检周期较大引起的。同样地，若要进一步提高均衡性，只能通过长时间两两交换巡检工作来实现了。

5.2 错时上班且有休息巡检模型分析

问题要求：考虑巡检人员的休息时间、上班时间和进餐时间，每两个小时休息一次，休息时间为 5~10 分钟，并要求在指定的时间（中午 12 时，下午 6 时）左右进餐，有可能出现一个班次中有一名或者多名巡检工人进餐两次的情况。同样地本问也要分有进餐和无进餐休息两种情况。

1. 有进餐错时上班模型分析

根据问题 2 中所建立的模型，发现错时上班加上进餐休息时间的情况，只要 8 个巡检工人进行区域巡检可以满足题目中的约束条件。固定时间开始巡检，第一次巡检时需等待 35 分钟才开始巡检（第一个人不用等待），而错开时间虽然不需要等待 35 分钟，但也必须等第一次巡检后的 35 分钟才可以进行巡检。即错开上班对于进餐情形并没有起到节省人力资源的情况。

2. 无进餐错时上班模型分析

若没有进餐情况，只有休息时间，根据问题 2 的，知道各点都的休息时间是可以保证的。所以根据问题 2 的模型，无进餐有休息所需要的人数依次是 5，4，4 人。

所以，分析错时上班有没有节省人力资源要分两种情况讨论：

（1）若有两个班进餐，则所需人数为 8，8，5，与问题 2 人数相同，所以这种情况采用错时上班并没有减少人力资源。

（2）若有一个班一天能进餐两次，则每班所需的人数为 8，5，4，与问题 2 的人数相比，采用错时上班一天可以节省 1 人。

六、模型的评价

优点：

1. 查找结果方便，路线较为合理。
2. 进餐休息时间安排较为合理，交错进餐时间，节约人力资源。
3. 采用权衡度去平衡选择最优路线。

缺点：

1. 本文无法对具有思维的个体进行理想化巡检。
2. 对某些数据处理不够完美。
3. 计算项目过多，容易造成计算失误，导致其他数据的失误。

参考文献

- [1] 肖华勇, 周吕文, 赵松. 大学生数学建模竞赛指南. 北京: 电子工业出版社, 2015.
- [2] 袁新生, 邵大宏, 郁时炼. LINGO 和 Excel 在数学建模中的应用. 北京: 科技出版社, 2007.
- [3] 张秀兰, 林峰. 数学建模与实验. 北京: 化学工业出版社, 2013.
- [4] 谢金星, 薛毅. 优化建模与 LINDO/LINGO 软件. 北京: 清华大学出版社, 2005.

仅供参考学习，请勿侵权！

附录

附录 1: Floyd 的 MatLab 程序

```
clc
clear
n=26; %26个点
A=ones(n,n); % 创建矩阵
A=A*1000000;
A=A-diag(diag(A));
A(1,2)=2; % 两点间的行走时间
A(2,3)=1;A(2,4)=3;A(2,19)=5;
A(3,5)=1;A(3,6)=1;
A(4,21)=1;A(4,23)=4;
A(5,7)=2;
A(6,8)=2;A(6,14)=1;A(6,10)=5;
A(8,17)=1;
A(9,24)=2;A(9,25)=3;
A(10,11)=2;A(10,12)=6;
A(11,13)=2;A(11,15)=7;
A(12,15)=2;
A(13,16)=2;
A(15,18)=2;A(15,26)=6;
A(16,18)=3;
A(17,25)=1;
A(19,20)=2;
A(20,22)=2;
A(21,22)=2;
A(22,23)=1;
A(23,24)=1;
A(25,26)=3;

for j=1:n
    for i=1:j-1
        A(j,i)=A(i,j);
    end
end

[m,n]=size(A);
wt=zeros(m,n); % 创建矩阵存任意两点最短行走时间
wt=A;
% Floyd算法
for k=1:n
    for i=1:n
        for j=1:n
            t=wt(i,k)+wt(k,j);
            if t<wt(i,j)
                wt(i,j)=t;
            end
        end
    end
end
end
wt
```

附录 2: Floyd 的 MatLab 程序计算的任意两点间的最短行走时间

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1	0	2	3	5	4	4	6	6	11	9	11	15	13	5	17	15	7	18	7	9	6	8	9	10	8	11
2	2	0	1	3	2	2	4	4	9	7	9	13	11	3	15	13	5	16	5	7	4	6	7	8	6	9
3	3	1	0	4	1	1	3	3	8	6	8	12	10	2	14	12	4	15	6	8	5	7	8	9	5	8
4	5	3	4	0	5	5	7	7	7	10	12	16	14	6	18	16	8	19	7	5	1	3	4	5	9	12
5	4	2	1	5	0	2	2	4	9	7	9	13	11	3	15	13	5	16	7	9	6	8	9	10	6	9
6	4	2	1	5	2	0	4	2	7	5	7	11	9	1	13	11	3	14	7	9	6	8	9	9	4	7
7	6	4	3	7	2	4	0	6	11	9	11	15	13	5	17	15	7	18	9	11	8	10	11	12	8	11
8	6	4	3	7	4	2	6	0	5	7	9	13	11	3	11	13	1	13	9	11	8	9	8	7	2	5
9	11	9	8	7	9	7	11	5	0	12	14	14	16	8	12	17	4	14	8	6	6	4	3	2	3	6
10	9	7	6	10	7	5	9	7	12	0	2	6	4	6	8	6	8	9	12	14	11	13	14	14	9	12
11	11	9	8	12	9	7	11	9	14	2	0	8	2	8	7	4	10	7	14	16	13	15	16	16	11	13
12	15	13	12	16	13	11	15	13	14	6	8	0	9	12	2	7	12	4	18	20	17	18	17	16	11	8
13	13	11	10	14	11	9	13	11	16	4	2	9	0	10	7	2	12	5	16	18	15	17	18	18	13	13
14	5	3	2	6	3	1	5	3	8	6	8	12	10	0	14	12	4	15	8	10	7	9	10	10	5	8
15	17	15	14	18	15	13	17	11	12	8	7	2	7	14	0	5	10	2	20	18	18	16	15	14	9	6
16	15	13	12	16	13	11	15	13	17	6	4	7	2	12	5	0	14	3	18	20	17	19	20	19	14	11
17	7	5	4	8	5	3	7	1	4	8	10	12	12	4	10	14	0	12	10	10	9	8	7	6	1	4
18	18	16	15	19	16	14	18	13	14	9	7	4	5	15	2	3	12	0	21	20	20	18	17	16	11	8
19	7	5	6	7	7	7	9	9	8	12	14	18	16	8	20	18	10	21	0	2	6	4	5	6	11	14
20	9	7	8	5	9	9	11	11	6	14	16	20	18	10	18	20	10	20	2	0	4	2	3	4	9	12
21	6	4	5	1	6	6	8	8	6	11	13	17	15	7	18	17	9	20	6	4	0	2	3	4	9	12
22	8	6	7	3	8	8	10	9	4	13	15	18	17	9	16	19	8	18	4	2	2	0	1	2	7	10
23	9	7	8	4	9	9	11	8	3	14	16	17	18	10	15	20	7	17	5	3	3	1	0	1	6	9
24	10	8	9	5	10	9	12	7	2	14	16	16	18	10	14	19	6	16	6	4	4	2	1	0	5	8
25	8	6	5	9	6	4	8	2	3	9	11	11	13	5	9	14	1	11	11	9	9	7	6	5	0	3
26	11	9	8	12	9	7	11	5	6	12	13	8	13	8	6	11	4	8	14	12	12	10	9	8	3	0

附录 3: 最短行走时间回路 Lingo 程序

!先把wt的excel文件存放在同一路径下再运行,大概要3分钟左右的运行时间;

```

model:
sets:
site/1..26/:u;
link(site,site):wt,x;
!d是相邻两个连通点的步行时间;
endsets

data:
wt=@ole('D:\wt.xls',aa);
!aa是EXCEL文件的wt对应数据区域的命名;
enddata

min=@sum(link:wt*x);
@for(site(i):@sum(site(j)|j#ne#i:x(i,j))=1);
@for(site(j):@sum(site(i)|j#ne#i:x(i,j))=1);
@for(link(i,j)|i#ne#j#and#i#gt#1:u(i)-u(j)+26*x(i,j)<=25);
@for(link:@bin(x));
end

```

附录 4：问题一的 5 个工人 8 小时左右的具体巡检时间

N1 路线 1			N2 路线 1			N3 路线 1			N4 路线 1			N5 路线 1		
巡检时刻	巡检点	休息时间	巡检时刻	巡检点	休息时间	巡检时刻	巡检点	休息时间	巡检时刻	巡检点	休息时间	巡检时刻	巡检点	休息时间
0	22		3	4		4	9		8	6		15	15	
4	20		8	2		11	25		12	14		19	12	
9	19		14	1		16	26		21	10		25	18	
16	23		20	3		22	17		25	11		30	16	
20	24		24	5		25	8		35	6		35	13	
26	21		28	7		33	9				8	47	15	
31	22		36	4				6						3
		4			2									
35	22		38	4		39	9		43	6		50	15	
39	20		43	2		49	26		48	14		54	12	
44	19		49	1		56	8		58	11		60	18	
51	23		55	3		64	9		68	6		65	16	
55	24		62	4				10			10	73	15	
59	22				11									12
		11												
70	22		73	4		74	9		78	6		85	15	
74	20		78	2		84	26		83	14		89	12	
79	19		84	1		91	8		93	11		95	18	
86	23		90	3		99	9		103	6		100	16	
90	24		98	7				10			10	105	13	
96	21		106	4								117	15	
101	22				2									3
		4												
105	22		108	4		109	9		113	6		120	15	
109	20		113	2		116	25		117	14		124	12	
114	19		119	1		121	26		126	10		130	18	
121	23		125	3		128	8		130	11		135	16	
125	24		132	4		136	9		140	6		143	15	
129	22				11			8			8			12
		11												
140	22		143	4		144	9		148	6		155	15	
144	20		148	2		154	26		153	14		159	12	
149	19		154	1		161	8		163	11		165	18	

156	23	160	3	169	9	173	6	170	16	
160	24	168	7			10		10	175	13
166	21	176	4						187	15
171	22			2						3
	4									
175	22	178	4	179	9	183	6	190	15	
179	20	183	2	186	26	188	14	194	12	
184	19	189	1	200	8	198	11	200	18	
191	23	195	3	212	9	208	6	205	16	
195	24	202	4			10		10	213	15
199	22			11						12
	11									
210	22	213	4	214	9	218	6	225	15	
214	20	218	2	221	25	222	14	229	12	
219	19	224	1	226	26	231	10	235	18	
226	23	230	3	233	8	235	11	240	16	
230	24	238	7	241	9	245	6	8	245	13
236	21	246	4			8			257	15
241	22			2						3
	4									
245	22	248	4	249	9	253	6	260	15	
249	20	253	2	259	26	258	14	264	12	
254	19	259	1	266	8	268	11	270	18	
261	23	265	3	274	9	278	6	275	16	
265	24	272	4	11		10		10	283	15
269	22									12
	11									
280	22	283	4	284	9	288	6	295	15	
284	20	288	2	294	26	293	14	299	12	
289	19	294	1	301	8	303	11	305	18	
296	23	300	3	309	9	313	6	310	16	
300	24	308	7			10		10	315	13
306	21	316	4						327	15
311	22			2						3
	4									
315	22	318	4	319	9	323	6	330	15	
319	20	323	2	326	25	327	14	334	12	
324	19	329	1	331	26	336	10	340	18	
331	23	335	3	338	8	340	11	345	16	
335	24	342	4	346	9	350	6	353	15	

339	22			11		8		8		12	
		11									
350	22	353	4	354	9	358	6	365	15		
354	20	358	2	364	26	363	14	369	12		
359	19	364	1	371	8	373	11	375	18		
366	23	370	3	379	9	383	6	380	16		
370	24	378	7			10		10	385	13	
376	21	386	4						397	15	
381	22			2						3	
		4									
385	22	388	4	389	9	393	6	400	15		
389	20	393	2	399	26	398	14	404	12		
394	19	399	1	406	8	408	11	410	18		
401	23	405	3	414	9	418	6	415	16		
405	24	412	4			10		10	423	15	
409	22			11						12	
		11									
420	22	423	4	424	9	428	6	435	15		
424	20	428	2	431	25	432	14	439	12		
429	19	434	1	436	26	441	10	445	18		
436	23	440	3	443	8	445	11	450	16		
440	24	448	7	451	9	455	6	455	13		
446	21	456	4			8		8	467	15	
451	22			2						3	
		4									
455	22	458	4	459	9	463	6				
459	20	463	2	469	26	468	14	470	15		
464	19	469	1	476	8	478	11	474	12		
471	23	475	3	484	9	488	6	480	18		
475	24	482	4					485	16		
479	22					下班		120	493	15	12
下班	下班		下班								
									505	15	
									509	12	
									515	18	
									下班		
休息 时长	94	80		118		120		105			
上班 时长	479	479		480		480		500			

工作
时长

479

479

480

360

500

附录 5: 问题二的 8 个工人 8 小时左右的具体巡检时间

配对				配对				配对				配对			
路线 1		路线 2		路线 3		路线 4		路线 5		路线 6		路线 7		路线 8	
1	23	17	20	7	25	24	26	3	1	18	3	13	10	21	16
5	24	22	19	12	9	30	15	10	4	22	6	21	12	28	11
11	21	28	22	20	17	38	26	15	2	26	14	27	18	35	13
17	23	32	20	23	8			20	1	34	7	38	10	42	16
				28	25					39	5				
										42	3				
36	23	52	20	37	25	56	26	38	1	53	3	38	10	56	16
40	24	57	19	41	9	62	15	45	4	57	6	46	12	63	11
46	21	63	22	50	8	70	26	50	2	61	14	52	18	77	16
52	23	67	20	55	25			55	1	66	3	63	10		
71	23	87	20	72	25	91	26	73	1	93	3	73	10	91	16
75	24	92	19	76	9	97	15	80	4	97	6	81	12	98	11
81	21	98	22	85	8	105	26	85	2	101	14	87	18	105	13
87	23	102	20	90	25			90	1	109	7	98	10	112	16
										115	3				
106	23	122	20	107	25	126	26	108	1	128	3	107	10	126	16
110	24	127	19	111	9	132	15	115	4	132	6	115	12	133	11
116	21	133	22	120	8	140	26	120	2	136	14	121	18	147	16
122	23	137	20	125	25			125	1	141	3	132	10		
141	23	157	20	142	25	161	26	143	1	163	3	142	10	161	16
145	24	162	19	146	9	167	15	150	4	167	6	150	12	168	11
151	21	168	22	155	8	175	26	155	2	171	14	156	18	175	13
157	23	172	20	160	25			160	1	179	7	167	10	182	16
										185	3				
176	23	192	20	177	25	196	26	178	1	198	3	177	10	196	16
180	24	197	19	181	9	202	15	185	4	202	6	185	12	203	11
186	21	203	22	190	8	210	26	190	2	206	14	191	18	217	16
192	23	207	20	195	25			195	1	211	3	202	10		
211	23	227	20	212	25	231	26	213	1	233	3	212	10	231	16
215	24	232	19	216	9	237	15	220	4	237	6	220	12	238	11
221	21	238	22	225	8	245	26	225	2	241	14	226	18	245	13
227	23	242	20	230	25			230	1	249	7	237	10	252	16
										255	3				
246	23	262	20	247	25	266	26	248	1	268	3	247	10	266	16

250	24	267	19	251	9	272	15	255	4	272	6	255	12	273	11
256	21	273	22	260	8	280	26	260	2	276	14	261	18	287	16
262	23	277	20	265	25			265	1	281	3	272	10		
281	23	297	20	282	25	301	26	283	1	303	3	282	10	301	16
285	24	302	19	286	9	307	15	290	4	307	6	290	12	308	11
291	21	308	22	295	8	315	26	295	2	311	14	296	18	315	13
297	23	312	20	300	25			300	1	319	7	307	10	322	16
										325	3				
316	23	332	20	317	25	336	26	318	1	338	3	317	10	336	16
320	24	337	19	321	9	342	15	325	4	342	6	325	12	343	11
326	21	343	22	330	8	350	26	330	2	346	14	331	18	357	16
332	23	347	20	335	25			335	1	351	3	342	10		
351	23	367	20	352	25	371	26	353	1	373	3	352	10	371	16
355	24	372	19	356	9	377	15	360	4	377	6	360	12	378	11
361	21	378	22	365	8	385	26	365	2	381	14	366	18	385	13
367	23	382	20	370	25			370	1	389	7	377	10	392	16
										395	3				
386	23	402	20	387	25	406	26	388	1	408	3	387	10	406	16
390	24	407	19	391	9	412	15	395	4	412	6	395	12	413	11
396	21	413	22	400	8	420	26	400	2	416	14	401	18	427	16
402	23	417	20	405	25			405	1	421	3	412	10		
421	23	437	20	422	25	441	26	423	1	443	3	422	10	441	16
425	24	442	19	426	9	447	15	430	4	447	6	430	12	448	11
431	21	448	22	435	8	455	26	435	2	451	14	436	18	455	13
437	23	452	20	440	25			440	1	459	7	447	10	462	16
										465	3				
456	23	472	20	457	25	476	26	458	1	478	3	457	10	476	16
460	24	477	19	461	9	482	15	465	4	482	6	465	12	483	11
466	21	483	22	470	8	490	26	470	2	486	14	471	18	497	16
472	23	487	20	475	25			475	1	491	3	482	10		

附录 5：错时上班无休息巡检时间安排表

工人编号	出发时间 (min)	工作时长	调度中心等待时间	到达时间
N1	0	146	无	146
N2	35	122	无	157
N3	70	138	无	208
N4	105	126	无	231
N5	140	138	无	278
N1	175	122	29	297
N2	210	142	53	352

N3	245	122	37	367
N4	280	138	49	418
N5	315	126	37	441
N1	350	138	53	488
N2	385	122	33	507
N3	420	142	53	562
N4	455	122	37	577
N5	490	138	49	628
N6	525	128	37	653
N7	560	138	53	698
N8	595	122	33	717
N9	630	142	53	772
N6	665	122	37	787
N7	700	138	47	838
N8	735	130	37	865
N9	770	138	53	908
N6	805	122	33	927
N7	840	142	53	982
N8	875	122	37	997
N9	910	138	45	1048
N6	945	126	37	1071
N7	980	140	53	1120
N8	1015	122	33	1137
N9	1050	142	53	1192
N10	1085	122	37	1207
N11	1120	138	49	1258
N12	1155	126	35	1281
N13	1190	138	53	1328
N10	1225	122	33	1347
N11	1260	142	53	1402
N12	1295	122	37	1417
N13	1330	138	49	1468
N10	1365	126	37	1491
N11	1400	128	53	1528
N12	1435	122	33	1557
N13	1470	144	53	1614
N10	1505	122	37	1627
N11	1540	138	49	1678
N12	1575	126	47	1701
N13	1610	122	53	1732