常用随机变量分布

主讲教师：钟秋平

目 录

CONTENTS

均匀分布

➢ **定义3-6** 若随机变量X的概率密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

称 X 在区间 (a,b) 服从均匀分布，记为 $\boxed{X\sim U(a,b)}$

$$E(X)=\frac{a+b}{2}, \qquad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

数学期望　　　　方差

指数分布

➢ **定义3-7** 若随机变量X的概率密度函数为 $P(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

称 X 服从指数分布，记为 $X\sim P(\lambda)$

$$E(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

数学期望 方

差

例1

- 某批灯泡的使用寿命**X服从指数分布**，且其平均寿命为1000h，现从中任取一个灯泡，求使用超过1000h以上的概率。

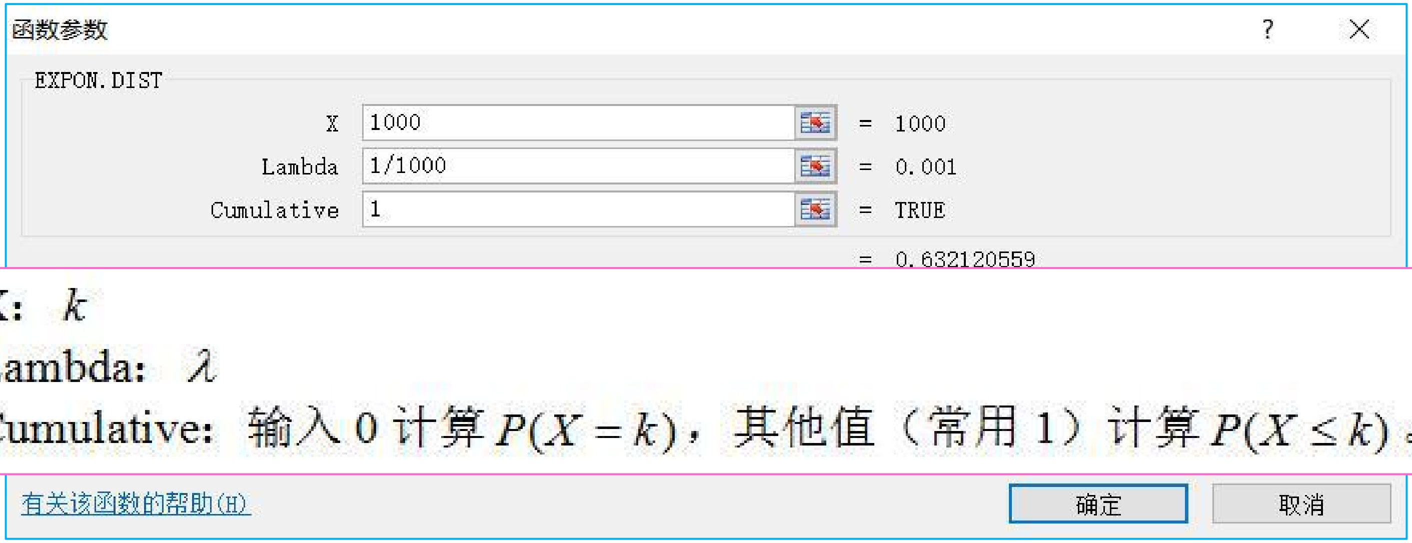
- **解**：灯泡的平均寿命为1000h，则$E(X)$=1000；又因为寿命X服从指数分布，则

$$E(X)=\frac{1}{\lambda} \qquad \therefore \lambda=\frac{1}{1000}$$

$$\therefore P(X>1000)=1-P(X\le 1000)=1-0.632=0.368$$

EXCEL函数：EXPON.DIST

➢ EXCEL求指数分布：$P(X=k)$ $P(X\le k)$



X：k

Lambda：λ

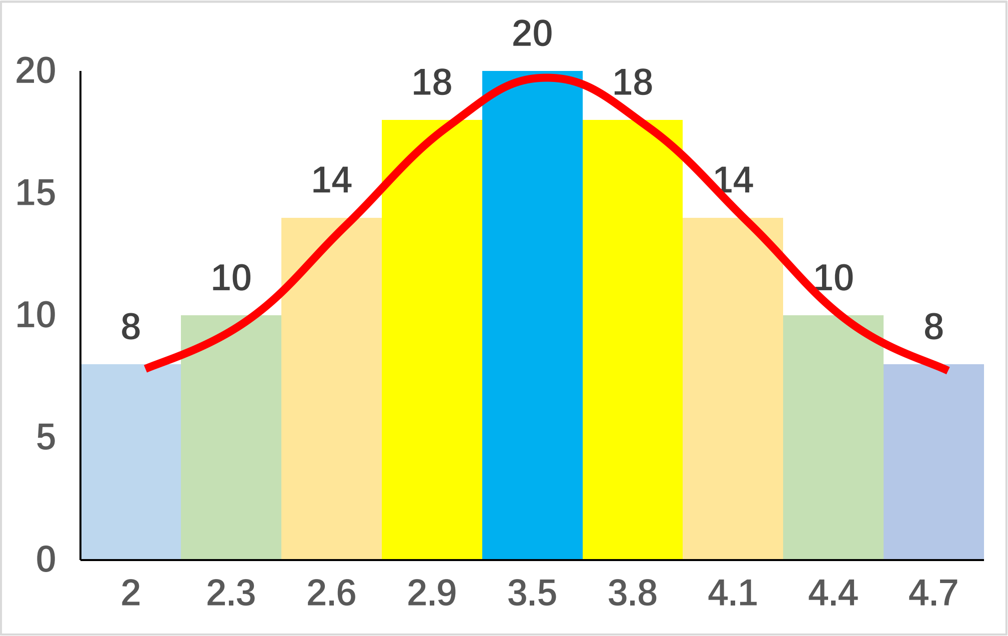
Cumulative：输入 0 计算 $P(X=k)$，其他值（常用 1）计算 $P(X\le k)$。

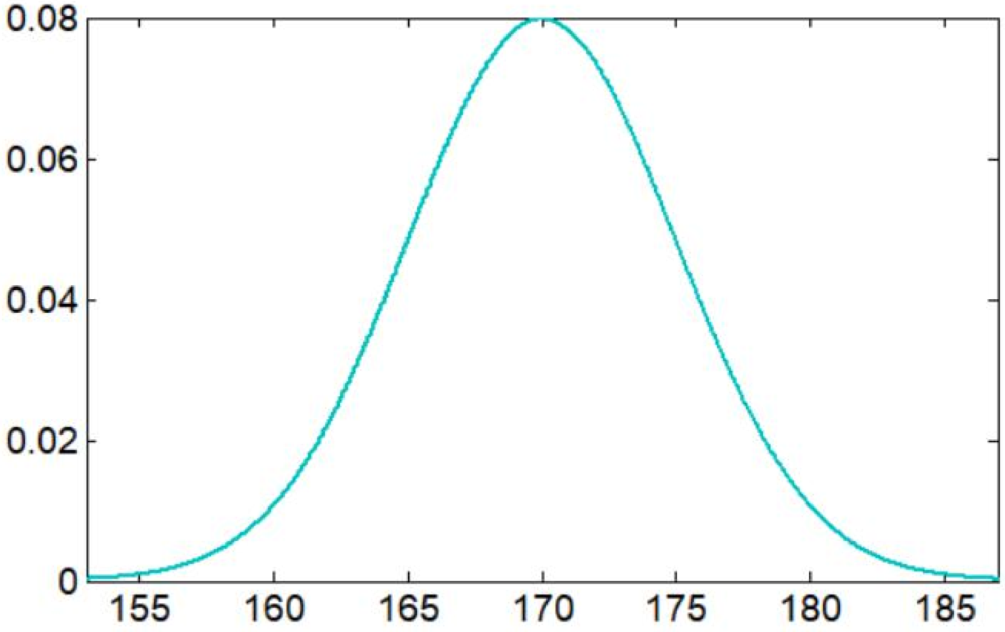
$$P(X>k)=1-P(X\le k)$$

$$P(a<X\le b)=P(X\le b)-P(X\le a)$$

正态分布

正态分布是连续型随机变量概率分布：产品的质量、人的身高、体重、红细胞数、胆固醇含量等都是服从或近似服从正态分布。





对称分布 (正态分布）

中间高、两边低

频数直方图

利用直方图

整理数据后关注其集中位置、变异程度、分布形态等整体特征。

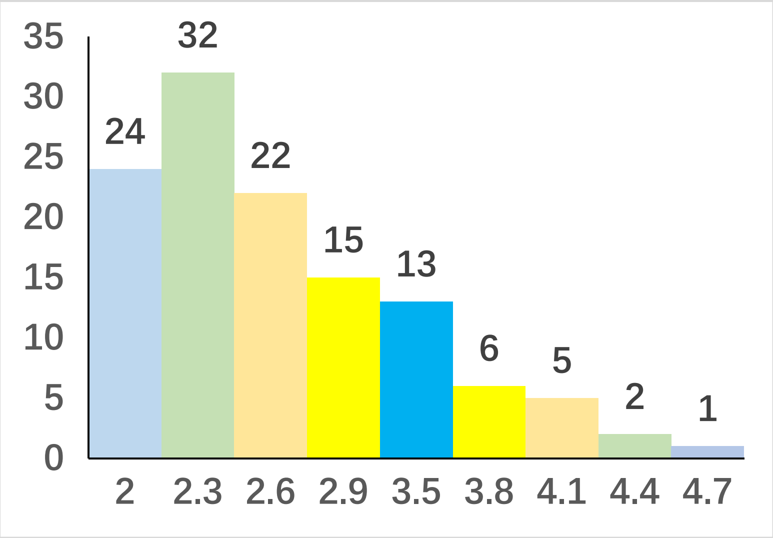


图1

偏态分布（不对称）

右偏态（正偏态）

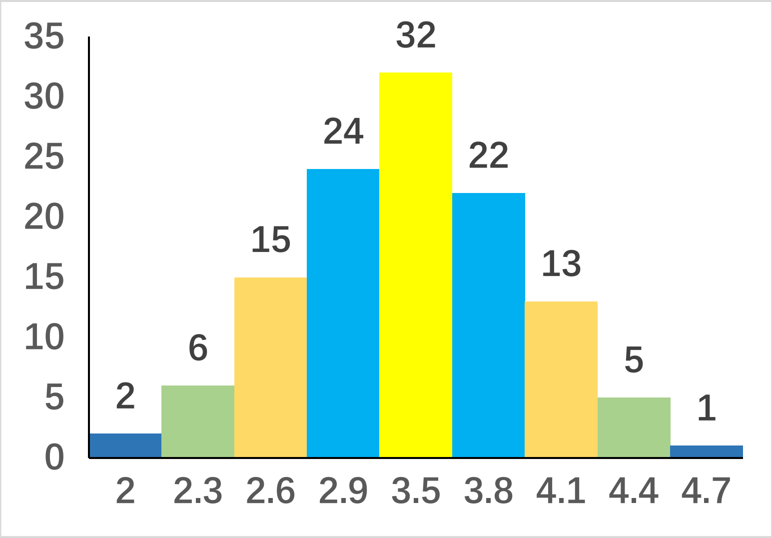


图2

(近似）对称分布

(近似）正态分布

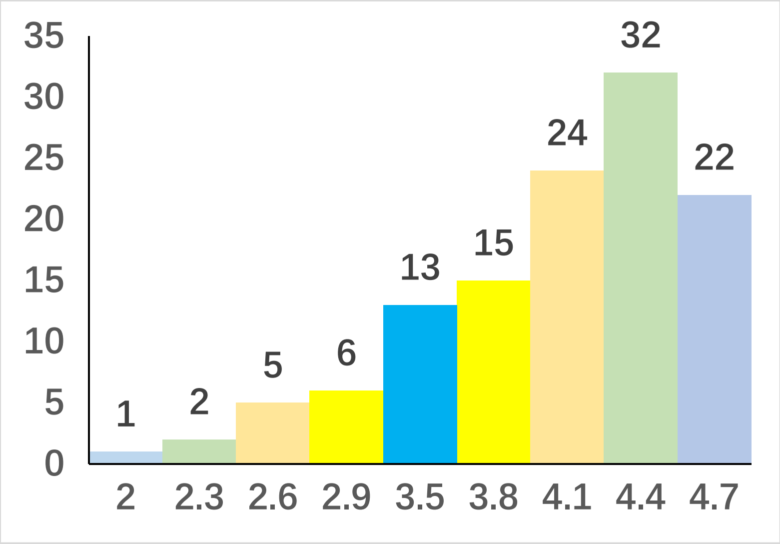


图3

偏态分布（不对称）

左偏态（负偏态）

正态分布的定义

➢ **定义3-8** 随机变量 X 的概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty$$

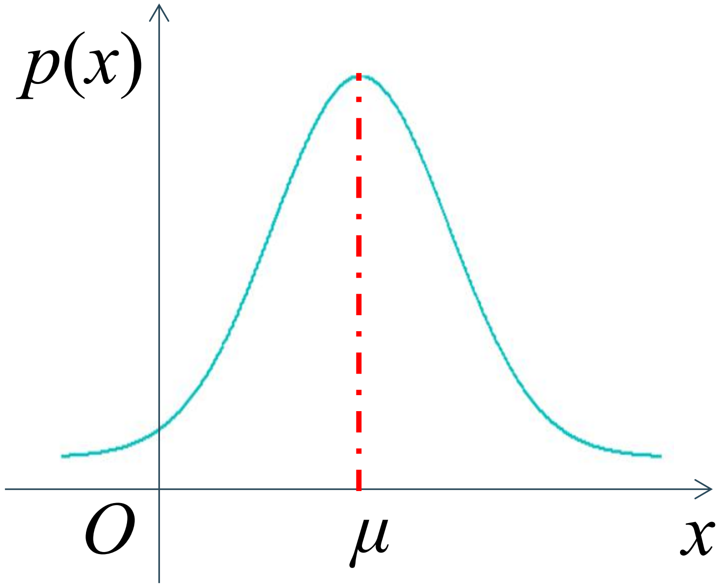
称 X 服从 μ，σ^2的正态分布，记为

$$X\sim N(\mu,\sigma^2)$$

μ均值(期望），σ^2方差

$$X\sim N(0,1)$$

标准正态分布



正态分布概率密度曲线

练习1

- 设 $X \sim N(20, 16)$，求

$E(X)$

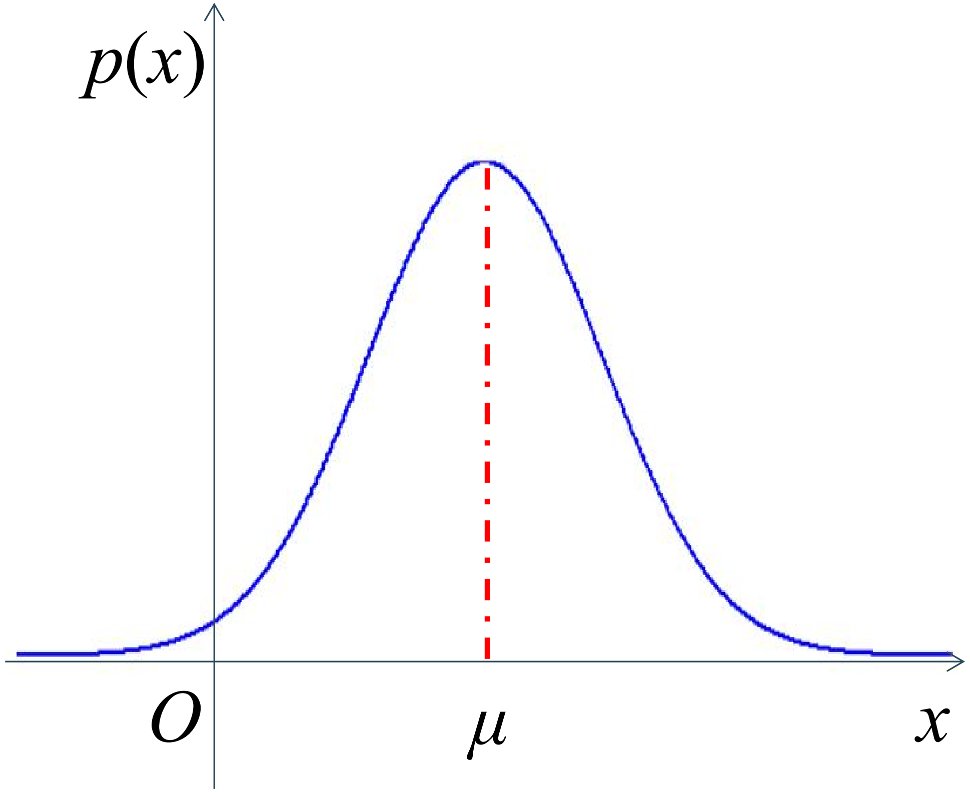
$E(2X+1)$

$D(X)$

$D(2X+1)$

正态分布的特点

互动



（1）单峰呈钟形，

$x=\mu$ 是对称轴，此时取最大值

（中间大、两边小）

x 轴是渐近线，两端与 x 轴不相交；

$\mu\pm\sigma$ 是拐点。

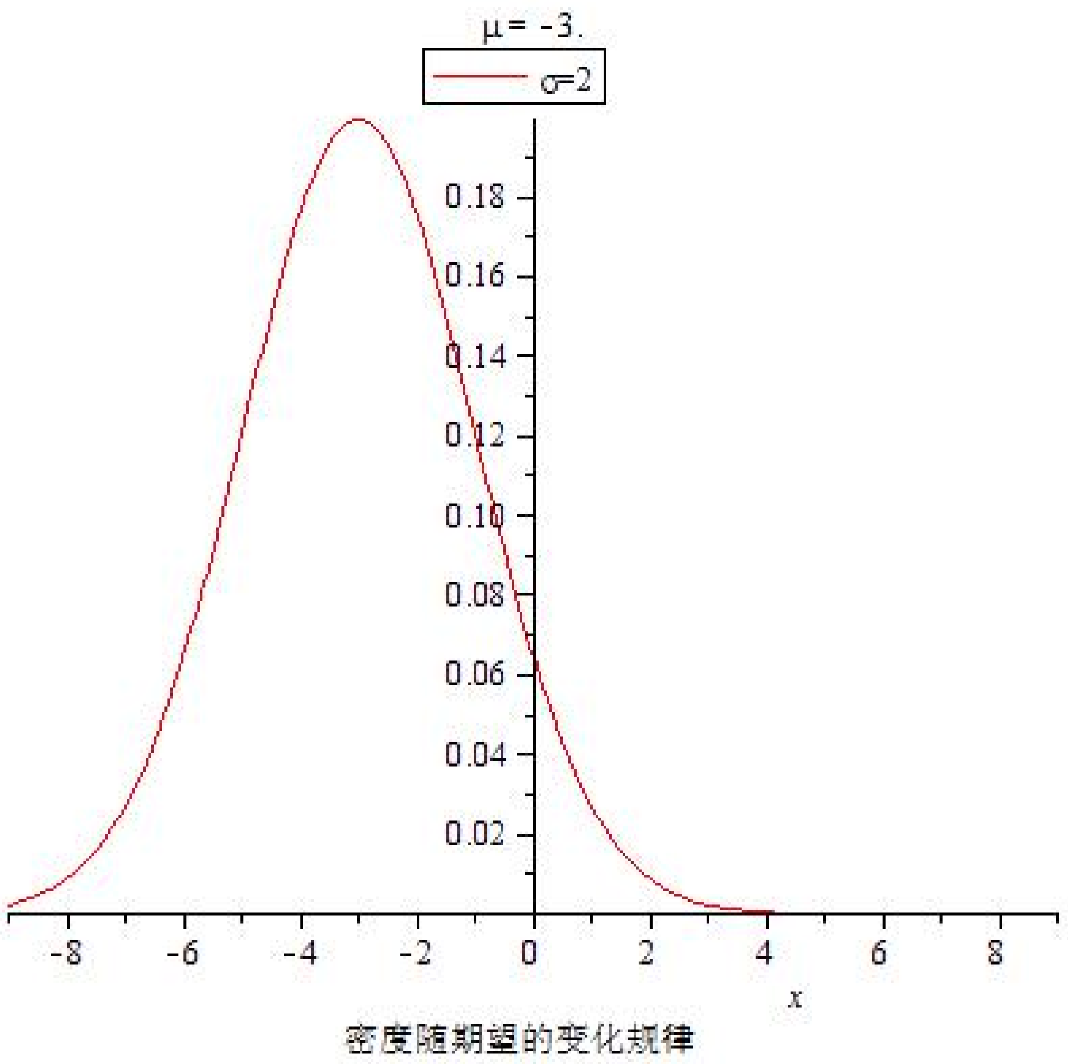
正态分布的特点

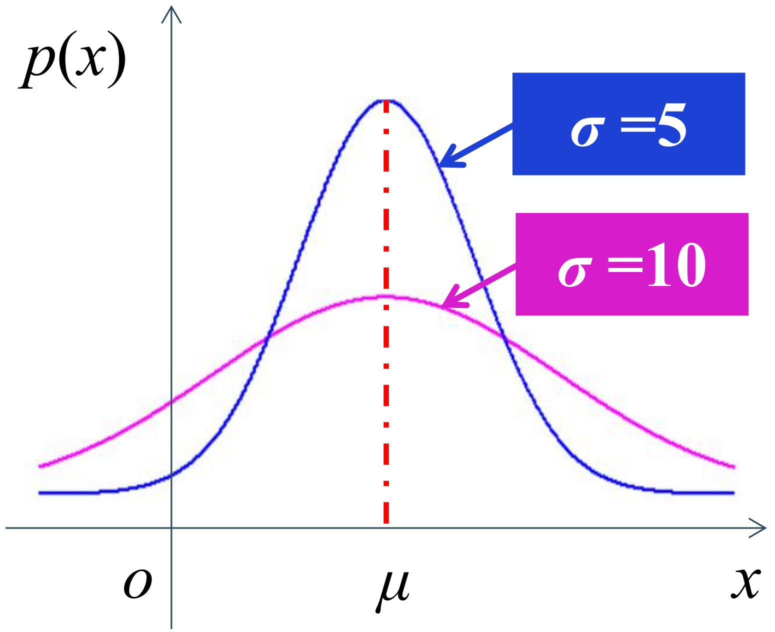
互动

（2）：μ确定曲线的位置，

σ确定曲线陡峭程度。

σ小呈高瘦， σ大呈矮胖

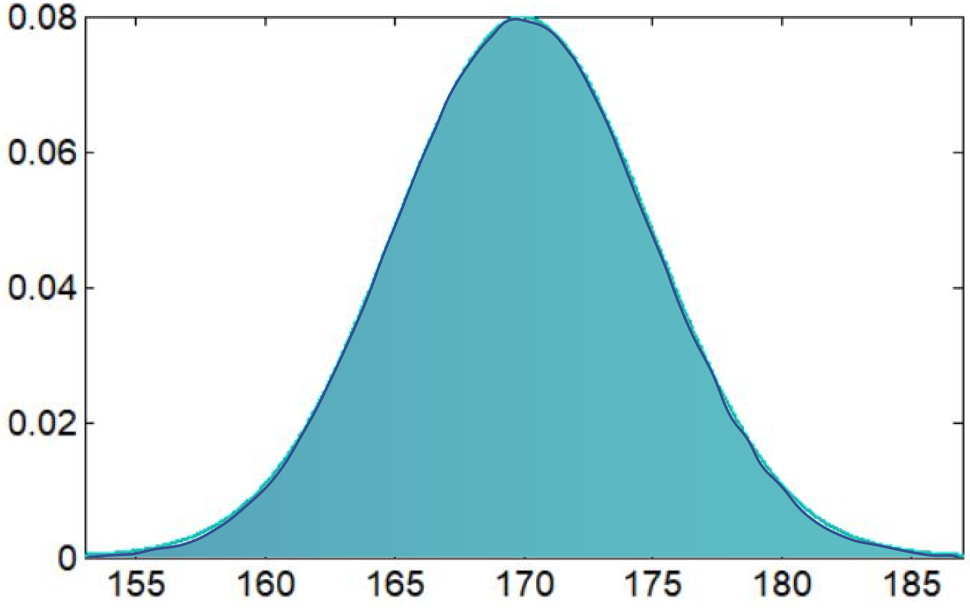


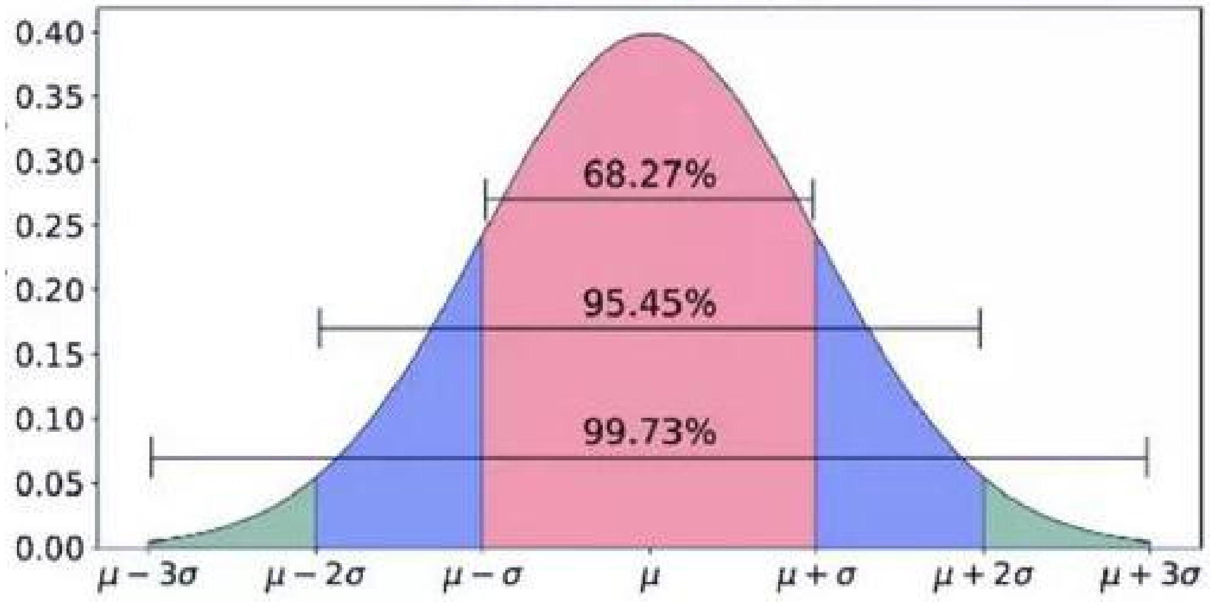


正态分布的特点

互动

（3）曲线下的**面积是概率**，**总面积等于1**。





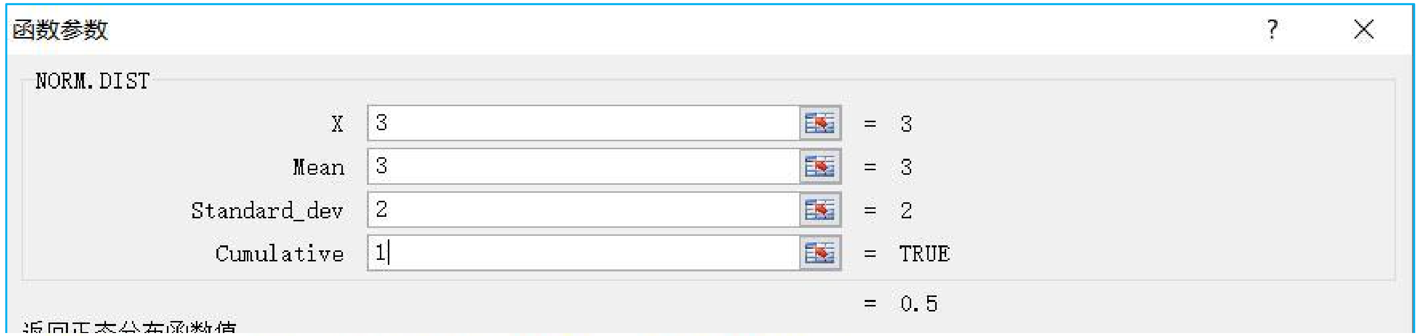
练习2

单选题 **1.** 正态分布的参数μ和σ，当（　　）时，正态曲线的形状越扁平。

A、μ越大　B、μ越小　C、σ越大　D、σ越小

EXCEL函数：NORM. DIST

- EXCEL求正态分布：$P(X=k)$ $P(X\le k)$



X：正态分布函数值的区间点，即 k 值

Mean：分布的均值（数学期望），即 μ

Standard_dev：正态分布的标准差，即 σ

Cumulative：输入 0 计算 $P(X=k)$，其他值（常用 1）计算 $P(X\le k)$

$$P(X>k)=1-P(X\le k)$$

$$P(a<X\le b)=P(X\le b)-P(X\le a)$$

标准正态分布

$$\boxed{X \sim N(0,1)}$$ 方差σ^2=1，均值μ=0

标准正态分布**累积概率**的计算，由P_{238}附表1 查 $\phi(x)$

$$P(X \le x) = \Phi(x)$$

$$P(a < X \le b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$P(X > c) = 1 - \Phi(c)$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

P_{50} 例3-7

- 设 $X \sim N(0,1)$，求 (1) $P(X \le 1.5)$ (2) $P(|X| < 1)$

(1) $P(X \le 1.5) = \Phi(1.5) = 0.9332$

P_{238} 附表1，1. 5=1. 5+0. 00，1. 5与0. 00相交的数值

(2) $P(-1 < X < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1)$

$$= \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1$$

$$= 2 \times 0.84135 - 1 = 0.6827$$

练习3

- 设 $X \sim N(0,1)$，求

P_{238} 附表1

(1) $P(X \le -2.01)$

(2) $P(X > 0.67)$

（3）$P(0.81 < X < 2.3)$

$$P(X \le x) = \Phi(x)$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

$$P(X > c) = 1 - \Phi(c)$$

$$P(a < X \le b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

正态分布转化为标准正态分布　P_{51}

$$\boxed{X \sim N(\mu,\sigma^2)}$$

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$P(X \le a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X > c) = 1-\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a < X \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X \le a) = \Phi(a)$$

$$P(X > c) = 1-\Phi(c)$$

$$P(a < X \le b) = \Phi(b)-\Phi(a)$$

$$\Phi(-a) = 1-\Phi(a)$$

例2

- 设 $X \sim N(3, 2^2)$，求

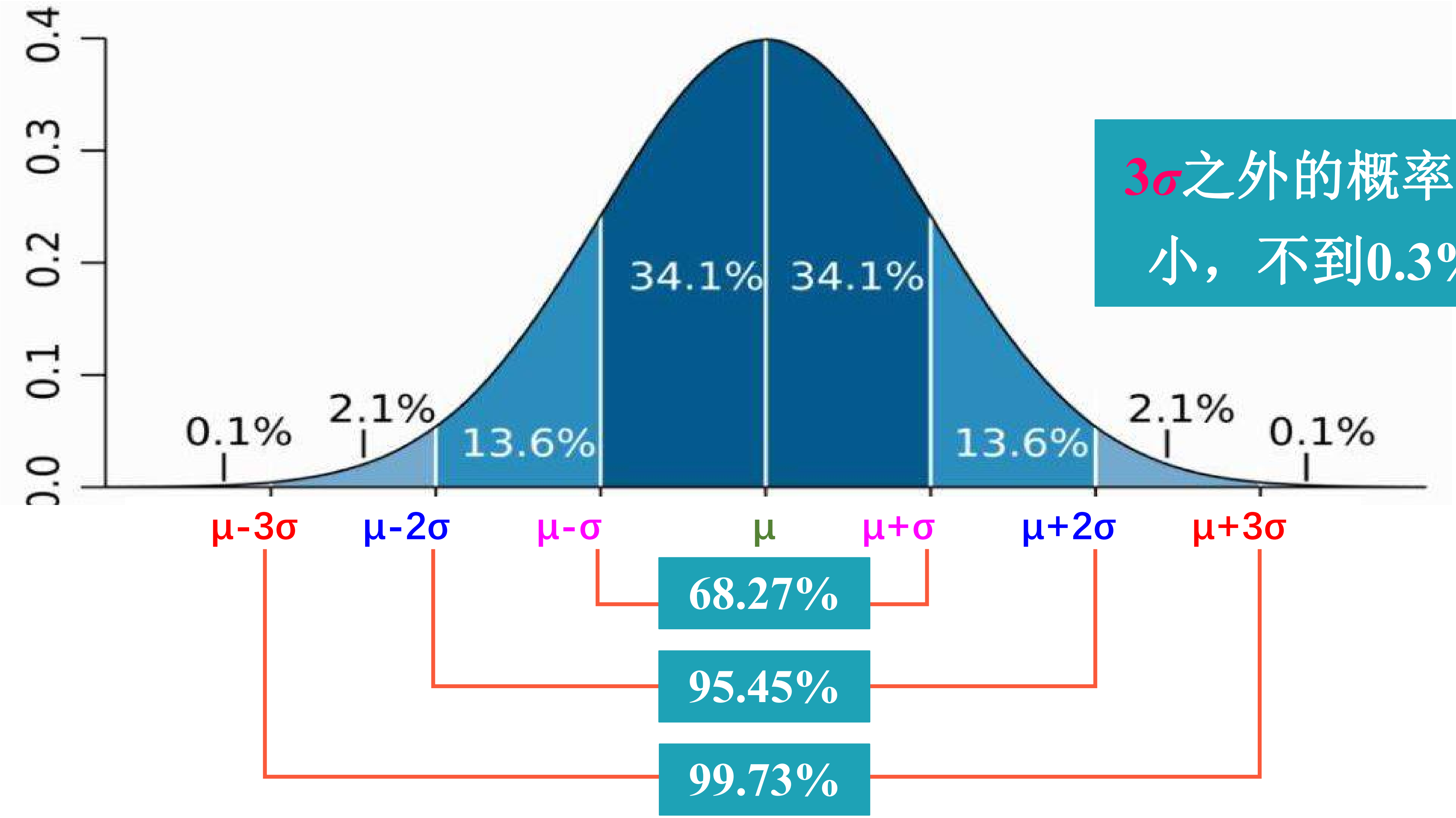
$$(1)\quad P(X > 3) \qquad (2)\quad P(-2 < X < 8)$$

$$(1)\quad P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - \Phi\left(\frac{3-3}{2}\right) = 1 - \Phi(0)$$

$$(2)\quad P(-2 < X < 8) = \Phi\left(\frac{8-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2-3}{2}\right)$$

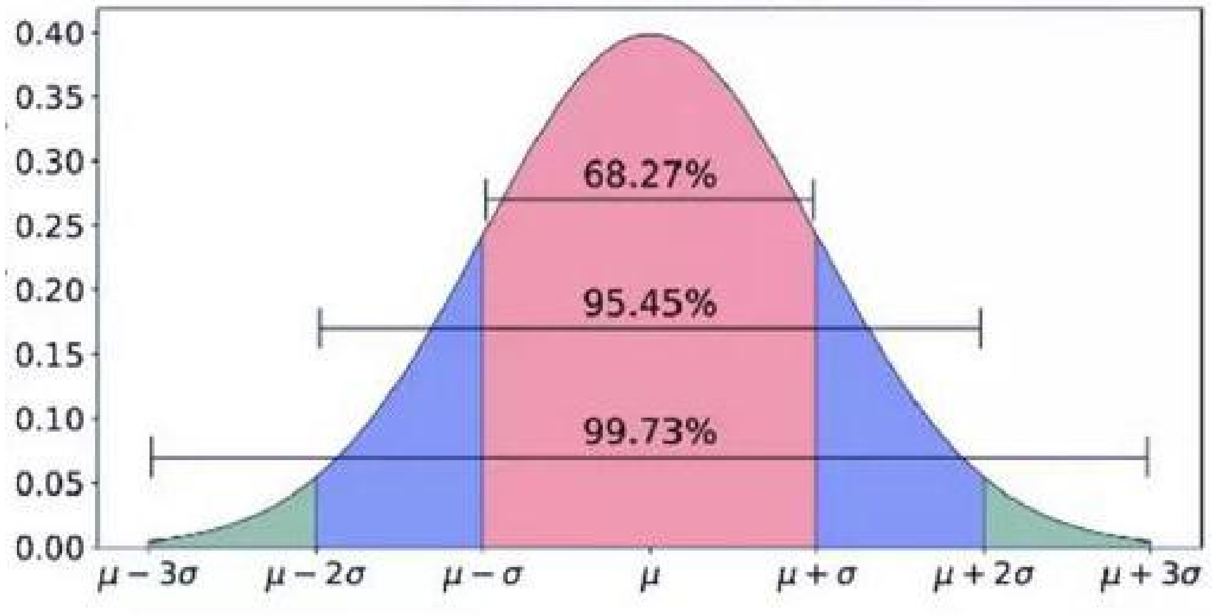
练习 $P(X \le 4)$, $\quad P(1 < X < 5)$

正态分布的医学应用--正态分布的3σ原则



3σ之外的概率很小，不到0.3%

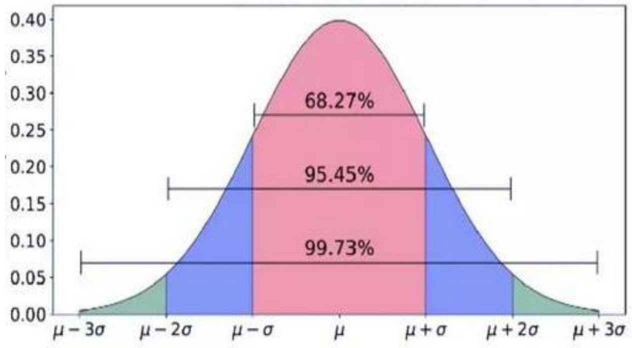
正态分布的医学应用--正态分布的3σ原则



1. 产品的质量检测中，将[μ-2σ, μ+2σ]作为上下警戒值。

正态分布的医学应用--正态分布的3σ原则

医学参考值范围又称正常值范围，一般使用的是95%参考值范围。但是要根据指标的特点选择单侧还是双侧估计，如下表所示。



		95%参考值范围	要求
双侧		$\mu \pm 1.96\sigma$	指标过高或过低均属异常（如血红蛋白含量、白细胞数、血压等）
单侧	下限	$\mu - 1.64\sigma$	指标仅过低异常（如肺活量等）
	上限	$\mu + 1.64\sigma$	指标（如血铅、发汞等）

例3

已知某地正常男子红细胞计数服从正态分布，平均值和标准差分别为：$\mu=4.78\times10^{12}/L$， $\sigma=0.38\times10^{12}/L$

试估计该地正常成年男子红细胞计数的95%参考值范围。

解： 因为95%对应的参考值范围为$[\mu-1.96\sigma, \mu+1.96\sigma]$

$$\mu-1.96\sigma = 4.78\times10^{12}-1.96\times0.38\times10^{12}= 4.04\times10^{12}/L$$

$$\mu+1.96\sigma= 4.78\times10^{12}+1.96\times0.38\times10^{12}= 5.52\times10^{12}/L$$

所以95%的参考值范围为 $4.04\times10^{12}/L \sim 5.52\times10^{12}/L$

练习4

调查某市200名正常成年人的尿汞值（μg/L）服从正态分布，平均值和标准差分别为：$\mu=32.6$ μg/L， $\sigma=13.8$ μg/L

试估计该地正常成年人的尿汞值的95%参考值范围。

THANKS

主讲教师：钟秋平