数学建模讲义

差分方程模型

——动物的繁殖与收获

博雅教育学院

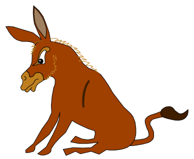
动物的繁殖与收获

野生动物种群在自然环境下繁殖、成长、死亡,不同年龄动物的数量比例保持平衡.

饲养动物种群在人类控制下,使不同年龄动物的数量比例达到稳定的预期目标.

- 建立动物种群的自然增长模型.
- 讨论饲养动物种群的稳定收获.

按年龄分组的动物种群增长模型



不同年龄动物的繁殖率、死亡率差别较大.

按照年龄分组　　时段与年龄组相对应.

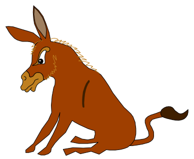
种群通过雌性繁殖而增长.

以雌性个体数量为对象.　总体数量按性别比计算.

- 建立按年龄分组种群增长的差分方程模型.

- 讨论稳定状况下种群的增长规律.

模型假设



- 种群按照年龄等间隔地分为n个年龄组.
- 时间分成与年龄组区间大小相等的时段.

在稳定环境下和不太长时期内

- 每个年龄组的雌性个体在一个时段内的繁殖率和死亡率不随时段变化.

模型建立

$x_i(k)$~第i年龄组第k时段的种群数量，　$i=1,2,\ldots,n$，$k=0,1,2,\ldots$

b_i~第i年龄组的繁殖率 (每个雌性个体一个时段繁殖的数量).

$b_i \ge 0$，至少一个$b_i > 0$.

d_i ~第i年龄组的死亡率

(一个时段内死亡数量在总量中的比例).

$s_i = 1 - d_i$~ 存活率

$0 < s_i \le 1$, $s_n = 0$

例. 种群分5个年龄组,繁殖率为 $b_1=0$, $b_2=0.2$, $b_3=1.8$, $b_4=0.8$, $b_5=0.2$, 存活率为$s_1=0.5$, $s_2=0.8$, $s_3=0.8$, $s_4=0.1$, $s_5=0$

模型建立

繁殖率为b_1=0, b_2=0.2, b_3=1.8, b_4=0.8, b_5=0.2

存活率为s_1=0.5, s_2=0.8, s_3=0.8, s_4=0.1, s_5=0

$x_i(k)$~第i年龄组第k时段的种群数量

第1年龄组(出生婴儿)k+1时段数量 =各年龄组k时段繁殖数量之和.

$$x_1(k+1)=\sum_{i=1}^{n} b_i x_i(k)$$

k=0,1,2,…

k时段第i年龄组存活的部分到 k+1时段演变为第i+1年龄组.

$$x_{i+1}(k+1)=s_i x_i(k)$$

i=1,2,…, n-1, k=0,1,2,…

n个变量的差分方程组

已知b_i, s_i 及$x_i(0)$ ⇨ 任意时段各年龄组的种群数量

按年龄分组的种群增长模型

$x_1(2)=$

$b_1x_1(1)$

$+b_2x_2(1)$

$+b_3x_3(1)$

$+b_4x_4(1)$

$+b_5x_5(1)$

$x_2(2)=s_1x_1(1)$

模型建立

繁殖率为$b_1=0, b_2=0.2, b_3=1.8, b_4=0.8, b_5=0.2$

存活率为$s_1=0.5, s_2=0.8, s_3=0.8, s_4=0.1, s_5=0$

$$x_1(k+1)=\sum_{i=1}^{n} b_i x_i(k)$$

$$x_{i+1}(k+1)=s_i x_i(k)$$

$$L=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Leslie矩阵(矩阵L)

$$x(k)=[x_1(k),x_2(k),\cdots,x_n(k)]^{\mathrm{T}}$$

按年龄分组的种群数量

$$x(k+1)=Lx(k)$$

$$x(k)=L^k x(0)$$

Leslie模型

$$x^*(k)=[x_1^*(k),x_2^*(k),\cdots,x_n^*(k)]^T,\quad x_i^*(k)=x_i(k)/\sum_{i=1}^{n} x_i(k)$$

$\boldsymbol{x(k)}$的归一化向量，按年龄分组的分布向量.

$x_i(k)$~第i年龄组第k时段的种群数量

模型求解

例. 种群分5个年龄组, 繁殖率为 $b_1=0$, $b_2=0.2$, $b_3=1.8$, $b_4=0.8$, $b_5=0.2$, 存活率为$s_1=0.5$, $s_2=0.8$, $s_3=0.8$, $s_4=0.1$, 各年龄组初始数量均为100只.

求任意时段各年龄组数量$x(k)$及分布向量$x^*(k)$.

$$L=\begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 1.8 & 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \qquad x(0)=\begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$x(k)=L^k x(0)$$

$$x(k)=[x_1(k), x_2(k), \ldots, x_5(k)]^T$$

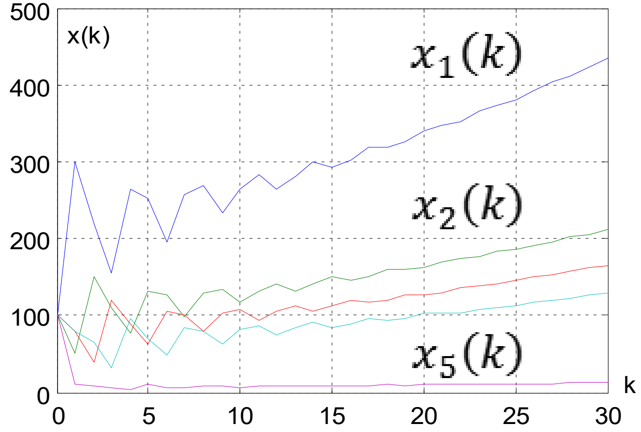
模型求解

$x_i(k)$~第i年龄组第k时段的种群数量

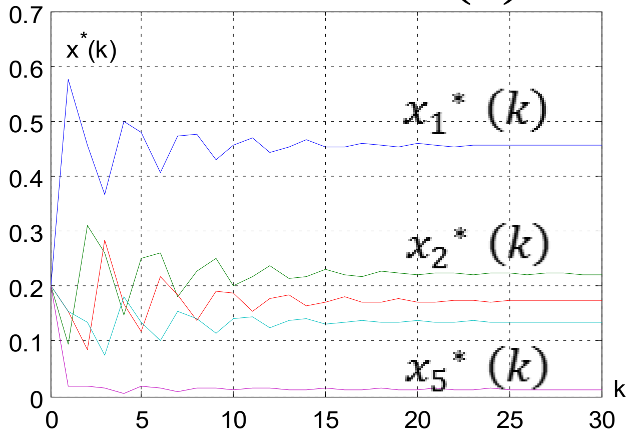
$$x(k)=[x_1(k), x_2(k), \ldots, x_5(k)]^T$$

k	0	1	2	3	4	…	26	27	28	29	30
$x_1(k)$	100	300	220	155	265	…	393	403	412	423	434
$x_2(k)$	100	50	150	110	77	…	190	196	201	206	211
$x_3(k)$	100	80	40	120	88	…	149	152	157	161	165
$x_4(k)$	100	80	64	32	96	…	117	120	122	126	129
$x_5(k)$	100	10	8	6	3	…	11	12	12	12	13

数量向量$x(k)$



分布向量$x^*(k)$



k充分大　$x(k)$仍在增长　$x^*(k)$趋向稳定

$x_i(k)$~第i年龄组第k时段的种群数量

结果分析 分析k充分大后$x(k), x^*(k)$的变化规律

稳定状态分析的数学知识

矩阵L存在最大特征根λ (正单根)

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

λ对应特征向量 x_λ

$$x_\lambda = [1, \frac{s_1}{\lambda}, \frac{s_1 s_2}{\lambda^2}, \cdots, \frac{s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{\lambda^{n-1}}]^T$$

$x(k) = L^k x(0)$ 满足 $\lim_{k\to\infty} x(k)/\lambda^k = c x_\lambda$ c~常数

$x_i(k)$~第i年龄组第k时段的种群数量

结果分析 k充分大$x(k)$, $x^*(k)$的特性 $\lim_{k\to\infty} x(k)/\lambda^k = c x_\lambda$

$x(k) \approx c x_\lambda \lambda^k$ 特征向量 $x_\lambda = [1, \frac{s_1}{\lambda}, \frac{s_1 s_2}{\lambda^2}, \cdots, \frac{s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{\lambda^{n-1}}]^T \xRightarrow{\text{归一化}} x^*$

1. 分布向量 $x^*(k) \approx x^*$ ~ 稳定分布. 与初始分布无关.

2. 数量 $x(k+1) \approx \lambda x(k) \Rightarrow x_i(k+1) \approx \lambda x_i(k)$

各年龄组数量按同一倍数λ (固有增长率)增减.

$\lambda=1 \Rightarrow$ 各年龄组数量保持不变.

3. $\lambda=1$时 $x(k) \approx c x_\lambda$, $x_\lambda = [1, s_1, s_1 s_2, \cdots, s_1 s_2 \cdots s_{n-1}]^T$

$\Rightarrow x_{i+1}(k) \approx s_i x_i(k)$ s_i等于同一时段相邻年龄组的数量比.

$x_i(k)$~第i年龄组第k时段的种群数量

结果分析

用算例验证$x(k)$, $x^*(k)$的特性

1. 由L计算得到λ=1.0254,

$$L=\begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 1.8 & 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

x^*=[0.4559, 0.2223, 0.1734, 0.1353, 0.0132]^T

模型求解中$x^*(30)$近似于x^*

2. 模型求解中$x_i(30)$与$x_i(29)$之比约为λ=1.0254.

3. λ=1.0254比1略大, $x_{i+1}(30)$与 $x_i(30)$之比近似于s_i

饲养动物种群的持续稳定收获模型

控制饲养动物各年龄组的数量, 实现持续稳定收获:

同一年龄组种群的收获量在每个时段都相等.

实现方法：每个年龄组每个时段种群的增长量=同一时段的收获量.

种群数量始终不变.

- 假定自然环境下饲养动物仍服从种群增长模型:

$x_i(k)$~第i年龄组第k时段的种群数量.

$$x(k)=[x_1(k),x_2(k),\cdots,x_n(k)]^{\mathrm{T}}$$

$$x(k+1)=Lx(k)$$

模型建立　　种群增长模型 $x(k+1)=Lx(k)$

h_i ~第i年龄组种群的收获系数(收获量与总量之比)

增长量 = 收获量

$$x_i(k+1)-x_i(k)=h_i x_i(k+1),\quad i=1,2,\cdots,n,\ \ k=1,2,\cdots$$

$$x(k+1)-x(k)=Hx(k+1),\quad k=1,2,\cdots$$

$$Lx(k)-x(k)=HLx(k),\quad k=1,2,\cdots$$

$$H=\begin{bmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & h_n \end{bmatrix}$$

实现持续稳定收获——种群数量$x(k)=x$ (对k不变)

$$Lx-x=HLx \Rightarrow L'x=x,\quad L'=L-HL$$

L'最大特征根为1

模型建立　持续稳定收获 $L'x = x, \quad L' = L - HL$

$$L' = \begin{bmatrix} b_1(1-h_1) & b_2(1-h_1) & \cdots & \cdots & b_n(1-h_1) \\ s_1(1-h_2) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2(1-h_3) & & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1}(1-h_n) & 0 \end{bmatrix}$$

L'的最大特征根 $\lambda' = 1$

$\Downarrow$

$$(1-h_1)[b_1 + b_2 s_1(1-h_2) + \cdots + b_n s_1 \cdots s_{n-1}(1-h_2)\cdots(1-h_n)] = 1$$

$\Uparrow$　　　　　　$\Downarrow$

给定b_i, s_i, 选择收获系数h_i　　　持续稳定收获

模型建立 持续稳定收获 $L'x = x, \quad L' = L - HL$

L' 的特征向量($\lambda' = 1$) ~种群数量的稳定分布：

$$x' = [1, s_1(1-h_2), \cdots, s_1 \cdots s_{n-1}(1-h_2)\cdots(1-h_n)]^T$$

增长量 = 收获量

$$Lx - x = HLx$$

$\Rightarrow$ 收获量的稳定分布 $HL\,x'$

$$HLx' = [h_1\{b_1 + b_2 s_1(1-h_2) + \cdots + b_n s_1 \cdots s_{n-1}(1-h_2)\cdots(1-h_n)\},$$
$$h_2 s_1, h_3 s_1 s_2(1-h_2), \cdots, h_n s_1 \cdots s_{n-1}(1-h_2)\cdots(1-h_{n-1})]^T$$

模型求解 持续稳定收获的条件

$$(1-h_1)[b_1+b_2s_1(1-h_2)+\cdots+b_ns_1\cdots s_{n-1}(1-h_2)\cdots(1-h_n)]=1$$

例. 设一个种群分成 3 个年龄组, 各年龄组的繁殖率为 $b_1=0$, $b_2=5$, $b_3=2$, 存活率为$s_1=0.8$, $s_2=0.5$.

- 确定各年龄组的收获系数以实现持续稳定收获.
- 求种群及收获量按年龄组的稳定分布.

持续稳定收获 $(1-h_1)[4(1-h_2)+0.8(1-h_2)(1-h_3)]=1$

1. 取$h_1=0$, $h_2=0.75$, $h_3=1$

2. 取$h_1=0.5$, $h_2=0.5$, $h_3=1$

模型求解 满足持续稳定收获条件

1. $h_1=0$, $h_2=0.75$, $h_3=1$

1. 不出售幼畜, 出售75%成年牲畜及全部老年牲畜.

2. $h_1=0.5$, $h_2=0.5$, $h_3=1$

2. 出售50%的幼畜和成年牲畜及全部老年牲畜.

收获量的稳定分布 $1. HLx'=[0,0.6,0.1]^T$， $2.\ HLx'=[1,0.4,0.2]^T$

小结与评注

- 模型基本假定：种群参数(繁殖率、存活率)只与年龄有关, 与时段无关(稳定环境、时间不长).
- Leslie矩阵为常数矩阵L——可用特征根方法作稳定性分析.
- 如果种群参数随时段变化($L=L(k)$), 模型表为 $x(k+1)=L(k)x(k)$,无稳定性分析.
- 人口增长与动物种群数量变化规律相同, 类似建立离散型女性人口模型——Leslie模型.

作业：差分方程模型

假设猫头鹰的主要食物是田鼠，设田鼠的年平均增长率为r_1，猫头鹰的存在引起的田鼠增长率的减少与猫头鹰数量成正比，比例系数a_1；猫头鹰的年平均减少率为r_2；田鼠的存在引起的猫头鹰增长率的增加与田鼠的数量成正比，比例系数为a_2，建立差分方程模型描述田鼠和猫头鹰共处时数量变化规律，对以下情况作图给出50年的变化过程。

a) 设$r_1 = 0.2, r_2 = 0.3, a_1 = 0.001, a_2 = 0.002$，开始时有100只田鼠和50只猫头鹰。

b) r_1, r_2, a_1, a_2同上，开始时有100只田鼠和200只猫头鹰。

c) 适当改变参数 a_1, a_2。